II-7　流出系の定数・状態量の推定

京都大学工学部　正員　椎葉充晴
京都大学工学部　正員　高棹琢馬
京都大学大学院　学生員　森川雅行

1. はじめに

降雨流出系は動的システムであって、そのモデルとして、以下のような状態空間法によるモデルを考えることができる。

すなわち、系が有限個の状態量 $x_1,\cdots,x_n$ で決定され、状態の推移は，状態方程式

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x,\omega,t) \qquad (1)$$

によって記述され，流出流量 y は，観測方程式

$$y=g(x,\omega,t) \qquad (2)$$

によって決定されると考えるのである。ただし，(1)，(2)中の x，ω はそれぞれ状態ベクトル，定数ベクトルであり、

$$x^T=(x_1,\cdots,x_n)\ ,\quad \omega^T=(\omega_1,\cdots,\omega_m)$$

である。

タンクモデルや貯留関数法は、貯水量を状態量と考えれば、この型のモデルであり、Kinematic wave 法も空間座標について差分近似すると、この型のモデルとなる。

状態空間法によって記述されるシステムに関する制御・同定・予測理論は、最近急激に発展している分野であり、本報告は、その流出系への適用例を示すものである。

2. モデル定数の同定

(a) 準線形化法

時刻 $t_1,\cdots,t_M$ で流量が観測されているものとし、それらを $Y_0(t_1),\cdots,Y_0(t_M)$ とする。計算値と観測値の差の重みつき2乗和（Wは重み），

$$S=\sum_{a=1}^{M}W(t_a)\left[Y(t_a)-Y_0(t_a)\right]^2 \qquad (3)$$

を最小にするように ω を決定することを考える。

この問題を準線形化反復法で解くのであるが，以下に概略を述べる。

いま，反復ステップ k での x，ω の推定値 x^k，ω^k が得られているものとし，(1)，(2)を x^k，ω^k の回りで準線形化すると、

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x^k,\omega^k,t)+\sum_j\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_j-x_j^k)+\sum_l\frac{\partial f_i}{\partial\omega_l}(\omega_l-\omega_l^k) \qquad (4)$$

$$Y=g(x^k,\omega^k,t)+\sum_j\frac{\partial g}{\partial x_j}(x_j-x_j^k)+\sum_l\frac{\partial g}{\partial\omega_l}(\omega_l-\omega_l^k) \qquad (5)$$

を得る。(4)，(5)より、(3)は、x の初期値 x_0 と定数 ω の二次式になるので，S を最小にする x_0，ω の値は連立一次方程式

$$\partial S/\partial x_0=0\ ,\quad \partial S/\partial\omega=0 \qquad (6)$$

の解である。(6)で定まる x_0，ω を用いた(4)の解を x^{k+1} とし、$\omega^{k+1}=\omega$ として次のステップへ進む。

g が，x，ω に関して線形であれば、こうして得られる系列での S の値は単調に減少するが，g が非線形であれば、S の値は必ずしも単調に減少するとは言えない。g の非線形性が強い場合には、x，ω に適当な近傍を定めて，S を最小化する二次計画問題を解いて次のステップの x^{k+1}，ω^{k+1} を定めるという方法をとるのがよい。これは、近似計画法（MAP）に類似した方法になる[1)]。

(b) 最大値原理による方法

時刻0から時刻Tまでの流量が観測されているものとし、(3)を一般化して，

$$S=\int_0^T\left[\{\dot{x}-f\}^TQ(t)\{\dot{x}-f\}\right.$$

$$+W(t)\{Y_0-g\}^2\Big]dt \qquad (7)$$

を最小化することを考える。ここに，$Q(t)>0$，$W(t)>0$ は重みである。

ポントリャーギンの最大値原理[2)]を適用すると，(7)を最小にする x，ω は，二点境界値をもつ次の連立常微分方程式

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{dx}{dt}&=f(x,\omega,t)+\frac{1}{2}Q^{-1}(t)\psi^T\\
\frac{d\psi}{dt}&=-2\{Y_0(t)-g(x,\omega,t)\}W(t)\frac{\partial g}{\partial x}-\psi\frac{\partial f}{\partial x}\\
\frac{d\bar{\omega}}{dt}&=-2\{Y_0(t)-g(x,\omega,t)\}W(t)\frac{\partial g}{\partial \omega}-\psi\frac{\partial g}{\partial \omega}\\
\psi(0)&=\psi(T)=0\\
\bar{\omega}(0)&=\bar{\omega}(T)=0
\end{aligned}\right. \qquad (8)$$

を満たす。

これは，ベルマンの準線形化法[3)]によって解くことが可能である。

3. 状態量の逐次推定

洪水調節用のダムを効果的に運用し，また予想される洪水災害に前もって対処するために，出水ハイドログラフをあらかじめ予測しておくことは重要である。そのためには，現在時刻Tでの状態量を時々刻々推定することが必要となってくる。

そのために，D.M. Detchmendy[4)] にしたがって，(8)から逐次推定式を導くと，

$$\frac{d\hat{x}}{dT}=f(\hat{x},T)+2P(T)W(T)G\{Y_0(T)-g(\hat{x},T)\}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{dT}&=f_{\hat{x}}(\hat{x},T)+P(T)f_{\hat{x}}(\hat{x},T)^T\\
&\quad+2P(T)\left[G\{Y_0(T)-g(\hat{x},T)\}\right]_{\hat{x}}P(T)\\
&\quad+\frac{1}{2}Q^{-1}(T)
\end{aligned} \qquad (9)$$

となる。ただし，添字 $\hat{x}$ は，$\hat{x}$ による偏微分を示す。また，$G=[\partial g/\partial x]^T$ であり，P は(8)から導かれる不変埋め込み方程式を近似する際に導入される行列である。

4. 適用例

庄内川流出試験地への適用例を下図に示す。モデル及び計算で与えた条件については，紙数の関係で割愛する。

5. あとがき

本報告では，統計的方法の適用を考えたが，確率的方法の適用について現在検討中である。

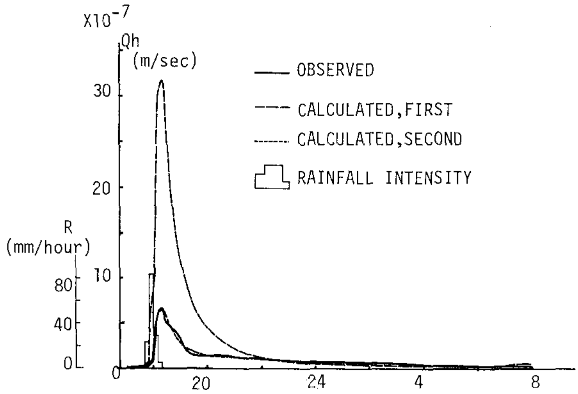

FIG.2 FLOW COMPARISON BY QUASILINEARIZATION

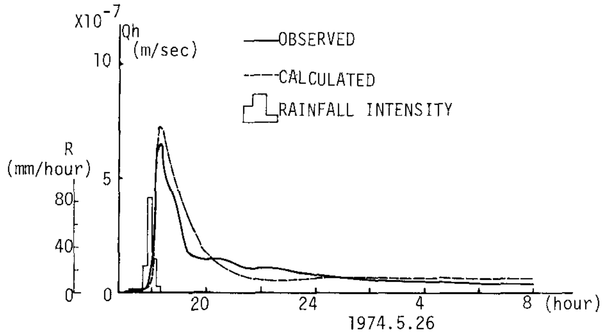

FIG.2 FLOW COMPARISON BY SEQUENTIAL ESTIMATION

参考文献

1) 渡辺浩・香沼龍雄「数理計画法」筑摩書房

2) ポントリャーギンほか「最適過程の数学的理論」総合図書

3) ベルマン・カラバ「準線形化とその応用」東京図書

4) D.M.Detchmendy, R.Shridhar; Sequential Estimation of States and Parameters in Noisy Nonlinear Dynamic Systems, Transactions of ASME, June 1966, pp 362–368