

長崎大学工学部 正員 崎山 毅

1. まえかき 極端な偏平アーチを除けば、橋梁主構として用いられる、拱矢比 $1/4 = 0.1 \sim 0.5$ の範囲の対称形アーチにおいては、対称荷重作用下において、非対称型の分岐座屈が生じる。このようなアーチの座屈耐荷性に対して、アーチ部材の幾何学的形状に肉する初期不整が大きな影響を与え、非対称変形の誘発により、座屈耐荷能力を低下せしめることが Schreyer⁽¹⁾や Cary⁽²⁾によって明らかにされている。本文は、初期不整量と確定量として取り扱い、集中荷重、Duck Load、Roll Loadを受けるアーチの有限変形解析にもとづいて、任意形アーチの座屈および座屈後挙動におよぼす、アーチ軸線の初期変位の影響を明らかにしたものである。

2. 増分形基礎方程式とその数値的一般解 アーチの変形状態における力の平衡条件にもとづいて、増分形の基礎微分方程式が誘導される。変形前アーチにおける、部材軸座標を s 、曲率半径を $R(s)$ とし、変形前アーチの法線および接線方向の分布荷重強度を $p(s)$ 、 $q(s)$ 、分布モーメント荷重強度を $m(s)$ とする。また、アーチ部材任意断面のせん断力、軸力および曲げモーメントを、 $\bar{Q}$ 、 $\bar{N}$ 、 $\bar{M}$ とし、アーチ軸位置角のたわみ角、伸縮ひずみと θ 、 ε とすれば、任意形アーチの変形状態における平衡条件は次の3式に与えられる。

$$\frac{d\bar{Q}}{ds} + (1+R \frac{d\theta}{ds}) \frac{\bar{N}}{R} + p \cos \theta - q \sin \theta = 0 \quad (1.a)$$

$$\frac{d\bar{N}}{ds} - (1+R \frac{d\theta}{ds}) \frac{\bar{Q}}{R} + p \sin \theta + q \cos \theta = 0 \quad (1.b), \quad \frac{d\bar{M}}{ds} - (1+\varepsilon) \bar{Q} - m = 0 \quad (1.c)$$

次に、 p 、 q 、 m なる初期荷重状態における断面力を Q^* 、 N^* 、 M^* とし、さらに、十分小さな増分荷重 Δp 、 Δq 、 Δm を加付された場合のせん断力、軸力、曲げモーメント、たわみ角、接線方向変位、法線方向変位および伸縮ひずみの増分を、それぞれ、 ΔQ^* 、 ΔN^* 、 ΔM^* 、 $\Delta \theta$ 、 Δw^* 、 Δu^* および $\Delta \varepsilon$ とすれば、式(1.a)~(1.c)を適用して、次のごとく、増分形の平衡方程式が求められる。

$$\frac{d\Delta Q^*}{ds} + \frac{\Delta N^*}{R} + N^* \frac{d\Delta \theta}{ds} - q \Delta \theta + \Delta p + \left[\Delta N^* \frac{d\Delta \theta}{ds} - \Delta q \Delta \theta + (p + \Delta p)(\cos \Delta \theta - 1) - (q + \Delta q)(\sin \Delta \theta - \Delta \theta) \right] = 0 \quad (2.a)$$

$$\frac{d\Delta N^*}{ds} - \frac{\Delta Q^*}{R} - Q^* \frac{d\Delta \theta}{ds} + p \Delta \theta + \Delta q + \left[-\Delta Q^* \frac{d\Delta \theta}{ds} + \Delta p \Delta \theta + (p + \Delta p)(\sin \Delta \theta - \Delta \theta) + (q + \Delta q)(\cos \Delta \theta - 1) \right] = 0 \quad (2.b)$$

$$\frac{d\Delta M^*}{ds} - \Delta Q^* - Q^* \Delta \varepsilon - \Delta m - \Delta Q^* \Delta \varepsilon = 0 \quad (2.c)$$

このとき、断面力増分 ΔQ^* 、 ΔN^* 、 ΔM^* と変位増分 $\Delta \theta$ 、 Δw^* 、 Δu^* との間には、次の関係が成立する。

$$\Delta M^* = -EI(s) \frac{d\Delta \theta}{ds} \quad (2.d), \quad \Delta N^* = EA(s) \left[\frac{d\Delta w^*}{ds} - \frac{\Delta u^*}{R(s)} \right] \quad (2.e)$$

$$\Delta \theta = \frac{d\Delta u^*}{ds} + \frac{\Delta w^*}{R(s)} \quad (2.f)$$

なお、(2.a)~(2.c)の各式における左辺の最終項は不平衡力の補正項である。

アーチ軸長、アーチ支間、基準曲げ剛性および基準伸び剛性を、 l 、 L 、 EI_0 、 EA_0 として、 $\Delta Q = -\Delta Q^* l^2 / EI_0$ 、 $\Delta N = -\Delta N^* l^2 / EI_0$ 、 $\Delta M = -\Delta M^* l^2 / EI_0$ 、 $\Delta w = \Delta w^* / L$ 、 $\Delta u = \Delta u^* / L$ 、 $\eta = s / l$ なる無次元量により、式(2.a)~(2.f)を無次元化し、アーチ部材軸座標 η の原点をアーチ左端にとり、諸量を変域 $[0, \eta]$ に積分して、積分方程式に変換する。次に、全変域 $[0, 1]$ を m 等分し、左側等分点より順に $0, 1, 2, \dots, m$ なる番号を付け、任意点 η における諸量に添字 i を付し、積分方程式に等間隔の数値積分法をくり返し適用することにより、離散点 i における一般解が求められ、次の各式となる。

$$\begin{bmatrix} \Delta Q_i \\ \Delta N_i \\ \Delta M_i \\ \Delta \theta_i \\ \Delta W_i \\ \Delta u_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1i} & a_{2i} & \dots & a_{6i} & a_{7i} \\ b_{1i} & b_{2i} & \dots & b_{6i} & b_{7i} \\ c_{1i} & c_{2i} & \dots & c_{6i} & c_{7i} \\ d_{1i} & d_{2i} & \dots & d_{6i} & d_{7i} \\ e_{1i} & e_{2i} & \dots & e_{6i} & e_{7i} \\ f_{1i} & f_{2i} & \dots & f_{6i} & f_{7i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta Q_0 \\ \Delta N_0 \\ \Delta M_0 \\ \Delta \theta_0 \\ \Delta W_0 \\ \Delta u_0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$a_{ki} = \delta_{ki} + \sum_{j=1}^6 \beta_{ij} V \left\{ -r_j \cdot b_{kj} - \bar{r}_j N_j \cdot C_{kj} - k^2 \bar{r}_j^2 \cdot d_{kj} + \delta_{kj} \cdot k^2 (\Delta \bar{r}_j + \Delta \bar{r}_{ej}) \right\}$$

$$b_{ki} = \delta_{ki} + \sum \beta_{ij} V \left\{ r_j \cdot a_{kj} + \bar{r}_j Q_j \cdot C_{kj} + k^2 \bar{r}_j^2 \cdot d_{kj} + \delta_{kj} \cdot k^2 (\Delta \bar{r}_j + \Delta \bar{r}_{ej}) \right\}$$

$$f_{ki} = \delta_{ki} + \sum \beta_{ij} V (-r_j \cdot e_{kj} + d_{kj})$$

$$\delta_{ij} = 70 \text{ ㏐} \cdot \text{㏐} - \text{㏐} \cdot \text{㏐} \cdot \text{㏐}, r_j = L/r_j, \bar{r}_j = EI_0/EI_j, k^2 = \Delta P L^2/EI_0 \dots$$

$$\beta_{ij} = \alpha_{ij}/24m, \alpha_{ij}: \text{数値積分の重み係数}$$

3. 数値解析結果 初期変位として、円弧アーチに肉くちは、 $u/L = e \cdot \sin 2\pi\eta$ 、放物線アーチに肉くちは、 $u/L = e \cdot \sin 2\pi\eta$ なる逆対称型の法線方向変位を仮定した。なお、無次元座標系はアーチ左端を原点とする水平軸座標である。図-1は、アーチクラウンに鉛直集中荷重Pを受ける、 $f/L = 0.25$ 、細長比 $a = \sqrt{A_0 L^2/E_0} = 200$ なる円弧アーチと放物線アーチに肉くち、 $e = 0, 0.005$ の場合の荷重-変形曲線である。放物線アーチに肉くち、分岐座屈荷重は $PL^2/EI = 33.4$ であり、 $e = 0.005$ なる初期変位がある場合の最高荷重は $PL^2/EI = 27.7$ であるから、この初期変位により耐荷能力は約17%低下する。また、円弧アーチに肉くち、分岐座屈荷重 $PL^2/EI = 33.3$ 、 $e = 0.005$ の場合の最高荷重 $PL^2/EI = 29.4$ であるから、約12%の耐荷能力の低下がみとめられる。図-2は Deck Load を受ける $f/L = 0.1, 0.2$ 、 $a = 200$ なる放物線アーチに肉くちの荷重-変形曲線である。Deck Load を受ける、初期変位のない放物線アーチはほぼ完全圧縮圧力状態にあるが初期変位が存在する場合には、載荷開始

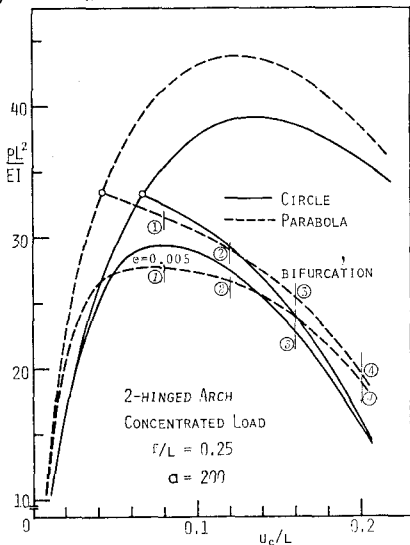


図-1

時より曲が変形が発生し、荷重-変形曲線は直線的な分岐経路に漸近する。図-3は、Rib Load を受ける、 $f/L = 0.2$ 、 $a = 200$ なる2ヒンジ円弧アーチの荷重-変形曲線である。図-2の場合と同様、初期変位がある場合の荷重-変形曲線はほぼ水平な分岐経路に漸近する。

なお、初期変位その他の初期不整の大きさを分布は、本来、ランダムなものと考えられ、その影響は統計的手法に基づいて解析される

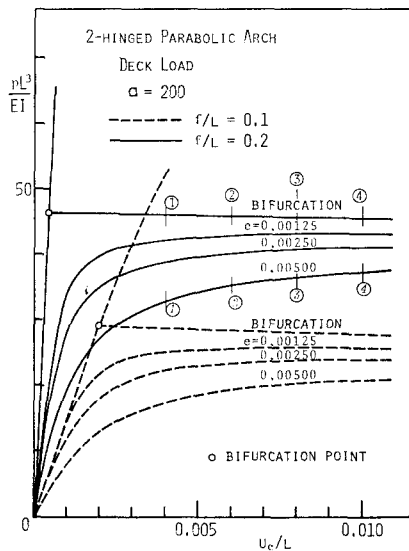


図-2

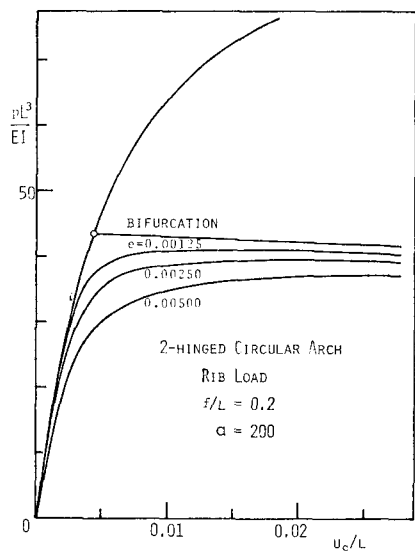


図-3

へまひがあるが、モンテカルロシミュレーション法などを用いることにより、本解析法によるアーチの有限変形の確率的解析も可能であると思われる。

(1) H.L. Schreyer: The Effect of Initial Imperfections on the Buckling Load of Shallow Circular Arches., Jour. Appl. Mech., June, 1972, p.445 (2) K.M. Cary, P.W. Kao: Finite Element Analysis of Buckling and Post-Buckling Behaviors of Arches with Geometric Imperfections., Con. & Stru., Vol. 3, 1973, p. 149