I-316　　リブ付板の格子桁理論による座屈解析法

岩手大学　正員　宮本 裕
北海道大学　正員　渡辺 昇
岩手大学　学生員　永藤寿宮

1. まえがき

リブ付板の座屈において，板とリブ（補剛材）のそれぞれの座屈における役割を明らかにするために，板と補剛材全体としての構造物を考え，板厚や補剛材断面積などのパラメータを変化させ座屈解析をするものである。

2. 解析の理論

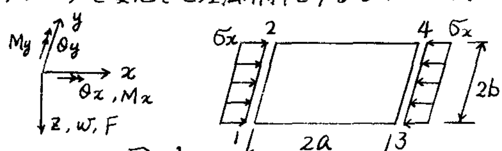

図-1

板の座屈の剛性マトリックス[1]　板の要素について図-1のように節点変位ベクトル $\{w_1\ \theta_{x1}\ \theta_{y1}\ w_2\ \theta_{x2}\ \theta_{y2}\ w_3\ \theta_{x3}\ \theta_{y3}\ w_4\ \theta_{x4}\ \theta_{y4}\}^T$　・・・（1）

を考える。ここで w（たわみ），θ_x（x 軸回りのたわみ角）$= -\frac{\partial w}{\partial y}$，$\theta_y$（$y$ 軸回りのたわみ角）$= \frac{\partial w}{\partial x}$ である。これに対する節点力ベクトルは $\{F_1\ M_{x1}\ M_{y1}\ F_2\ M_{x2}\ M_{y2}\ F_3\ M_{x3}\ M_{y3}\ F_4\ M_{x4}\ M_{y4}\}^T$ とする。

一方，ひずみエネルギー $U = \frac{D}{2}\iint\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy - \frac{1}{2}t\iint\left\{\sigma_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \sigma_y\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+2\tau_{xy}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right\}dx\,dy$ である。なお図-1は σ_x のみ存在し，$\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ の場合である。そして変位関数を $w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3$.　・・・（2）

と仮定すると，各節点における座標値を代入することにより，節点変位 $w_1 \sim \theta_{y4}$ は未定係数 $\alpha_1 \sim \alpha_{12}$ で表わされる。これらの連立方程式を $\alpha_1 \sim \alpha_{12}$ について解くと，$\alpha_1 \sim \alpha_{12}$ は節点変位 $w_1 \sim \theta_{y4}$ によって表わされる。これらの $\alpha_1 \sim \alpha_{12}$ を変位関数 w に代入し，さらにそれを上記ひずみエネルギー U の式に代入すると結局 U は $w_1 \sim \theta_{y4}$ によって表わされる。そしてカステリヤノの定理により $\frac{\partial U}{\partial w_1} = F_1$，$\frac{\partial U}{\partial \theta_{x1}} = M_{x1}$，$\frac{\partial U}{\partial \theta_{y1}} = M_{y1}$，・・・となり結局以下の剛性マトリックスの関係式を得る。ここで $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$（ただし t は板厚），$p = \frac{a}{b}$ とする。

$$
\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_{x1}/b \\ M_{y1}/a \\ F_2 \\ M_{x2}/b \\ M_{y2}/a \\ F_3 \\ M_{x3}/b \\ M_{y3}/a \\ F_4 \\ M_{x4}/b \\ M_{y4}/a \end{Bmatrix}
= \frac{D}{60ab}
\begin{bmatrix}
A_{11} & & & & & & & & & & & \\
A_{21} & A_{22} & & & & & & & & & & \\
A_{31} & A_{32} & A_{33} & & & & & \text{sym.} & & & & \\
B_{11} & B_{12} & B_{13} & A_{11} & & & & & & & & \\
B_{21} & B_{22} & B_{23} & -A_{21} & A_{22} & & & & & & & \\
B_{31} & B_{32} & B_{33} & A_{31} & -A_{32} & A_{33} & & & & & & \\
C_{11} & C_{12} & C_{13} & H_{11} & -H_{12} & H_{13} & A_{11} & & & & & \\
C_{21} & C_{22} & C_{23} & -H_{21} & H_{22} & H_{23} & A_{21} & A_{22} & & & & \\
C_{31} & C_{32} & C_{33} & H_{31} & H_{32} & H_{33} & -A_{31} & A_{32} & A_{33} & & & \\
H_{11} & H_{12} & H_{13} & C_{11} & -C_{12} & C_{13} & B_{11} & B_{12} & -B_{13} & A_{11} & & \\
H_{21} & H_{22} & H_{23} & -C_{21} & C_{22} & C_{23} & B_{21} & B_{22} & B_{23} & -A_{21} & A_{22} & \\
H_{31} & H_{32} & H_{33} & C_{31} & C_{32} & C_{33} & -B_{31} & B_{32} & B_{33} & -A_{31} & A_{32} & A_{33}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} w_1 \\ b\theta_{x1} \\ a\theta_{y1} \\ w_2 \\ b\theta_{x2} \\ a\theta_{y2} \\ w_3 \\ b\theta_{x3} \\ a\theta_{y3} \\ w_4 \\ b\theta_{x4} \\ a\theta_{y4} \end{Bmatrix}
- \frac{\sigma_x t b}{630a}
\begin{bmatrix}
K_{11} & & & \\
K_{21} & K_{22} & & \\
K_{31} & K_{32} & K_{33} & \text{sym.} \\
K_{41} & K_{42} & K_{43} & \\
K_{51} & K_{52} & K_{53} & \\
K_{61} & K_{62} & K_{63} & \\
K_{71} & K_{72} & K_{73} & \\
K_{81} & K_{82} & K_{83} & \\
K_{91} & K_{92} & K_{93} & \\
K_{10\,1} & K_{10\,2} & K_{10\,3} & \\
K_{11\,1} & K_{11\,2} & K_{11\,3} & \\
K_{12\,1} & K_{12\,2} & K_{12\,3} &
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} w_1 \\ b\theta_{x1} \\ a\theta_{y1} \\ w_2 \\ b\theta_{x2} \\ a\theta_{y2} \\ w_3 \\ b\theta_{x3} \\ a\theta_{y3} \\ w_4 \\ b\theta_{x4} \\ a\theta_{y4} \end{Bmatrix}
$$

ここに，$A_{11} = 6(10p^{-2}+10p^2-2\nu+7)$，$A_{21} = -6(10p^2+4\nu+1)$，$A_{22} = 16(5p^2-\nu+1)$，　・・・（3）
$A_{31} = 6(10p^{-2}+4\nu+1)$，$A_{32} = -60\nu$，$A_{33} = 16(5p^{-2}-\nu+1)$，$B_{11} = 6(5p^{-2}-10p^2+2\nu-7)$，$B_{12} = 6(10p^2-\nu+1)$，$B_{13} = B_{31} = 6(5p^{-2}-4\nu-1)$，$B_{21} = -6(10p^2-\nu+1)$，$B_{22} = 4(10p^2+\nu-1)$，$B_{23} = B_{32} = 0$，$B_{33} = 8(5p^{-2}+2\nu-2)$，$C_{11} = -6(10p^{-2}-5p^2-2\nu+7)$，$C_{12} = C_{21} = -6(5p^2-4\nu-1)$，$C_{13} = -6(10p^{-2}-\nu+1)$，$C_{22} = 8(5p^2+2\nu-2)$，$C_{23} = C_{32} = 0$，$C_{31} = 6(10p^{-2}-\nu+1)$，$C_{33} = 4(10p^{-2}+\nu-1)$，$H_{11} = -6(5p^{-2}+5p^2+2\nu-7)$，

$H_{12}=6(5p^2+\nu-1)$, $H_{13}=-6(5p^{-2}+\nu-1)$, $H_{21}=-6(5p^2+\nu-1)$, $H_{22}=4(5p^2-\nu+1)$, $H_{23}=H_{32}=0$, $H_{31}=6(5p^2+\nu-1)$, $H_{33}=4(5p^{-2}-\nu+1)$ である。また $K_{11}=276$, $K_{21}=-66$, $K_{31}=42$, $K_{42}=102$, $K_{51}=39$, $K_{61}=21$, $K_{71}=-276$, $K_{81}=66$, $K_{91}=-42$, $K_{10,1}=-102$, $K_{11,1}=-39$, $K_{12,1}=21$, $K_{22}=24$, $K_{32}=0$, $K_{42}=-39$, $K_{52}=-18$, $K_{62}=0$, $K_{72}=66$, $K_{82}=-24$, $K_{92}=0$, $K_{10,2}=39$, $K_{11,2}=18$, $K_{12,2}=0$, $K_{33}=112$, $K_{43}=21$, $K_{53}=0$, $K_{63}=56$, $K_{73}=-42$, $K_{83}=0$, $K_{93}=-28$, $K_{10,3}=-21$, $K_{11,3}=0$, $K_{12,3}=-14$ であり，第4列以降は第1集団の剛性マトリックスと同様に第3列までのくり返しとなるので省略する。

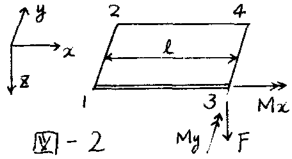

図-2

補剛材の座屈の剛性マトリックス　これについてはすでに文献3)において発表したので結果のみ述べる。ただし，板と補剛材(格子桁と考える)の座標系を統一して，主桁の剛性マトリックスの関係式は次のようになる。横桁についても同様の関係式が得られるが，省略する。

$$
\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_{x1} \\ M_{y1} \\ F_3 \\ M_{x3} \\ M_{y3} \end{Bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
12EI_y/l^3 & & & & & \\
0 & GJ/l & & \text{sym.} & & \\
-6EI_y/l^2 & 0 & 4EI_y/l & & & \\
-12EI_y/l^3 & 0 & 6EI_y/l^2 & 12EI_y/l^3 & & \\
0 & -GJ/l & 0 & 0 & GJ/l & \\
-6EI_y/l^2 & 0 & 2EI_y/l & 6EI_y/l^2 & 0 & 4EI_y/l
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_3 \\ \theta_{x3} \\ \theta_{y3} \end{Bmatrix}
- P
\begin{bmatrix}
6/5l & & & & & \\
0 & r_s^2/l & & \text{sym.} & & \\
-1/10 & 0 & 2l/15 & & & \\
-6/5l & 0 & 1/10 & 6/5l & & \\
0 & -r_s^2/l & 0 & 0 & r_s^2/l & \\
-1/10 & 0 & -1/30 & 1/10 & 0 & 2l/15
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_3 \\ \theta_{x3} \\ \theta_{y3} \end{Bmatrix}
\quad \cdots (4)
$$

一般固有値問題　式(3),(4)は一般的に $\{Z\}=[k]\{\phi\}-\sigma_x[g]\{\phi\}$ または $[k]\{\phi\}-P[g]\{\phi\}$ と書き表わされる。ここで $\{Z\}$, $\{\phi\}$ はそれぞれ力，変位ベクトルであり，$[k]$ はいわゆる板や桁についての剛性マトリックスであり，$[g]$ は幾何剛性マトリックスとよばれている。これらの剛性マトリックスを合計して全体の剛性マトリックスを作り，境界条件を与えた後，固有値問題として解く。すなわち $[K]\{\phi\}=p[G]\{\phi\}$ $\cdots(5)$　なお剛性マトリックスの合計については，図-3のような場合ひずみの連続の条件から応力についても $P_1/A_1=P_2/A_2=\sigma_p=\sigma_x=\sigma$ とおいて，$P_1=\sigma A_1$, $P_2=\sigma A_2$ で $([\text{板の}K]+[\text{主桁1の}K]+[\text{主桁2の}K]+[\text{横桁の}K])\{\phi\}$ $=(\sigma[\text{板の}G]+\sigma A_1[\text{主桁1の}G]+\sigma A_2[\text{主桁2の}G])\{\phi\}$ $\cdots$ (6)

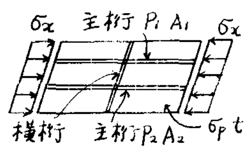

図-3

となる。式(5)を解くにはコレスキー分解によって，$[L]$ を下三角マトリックスとすると $[G]=[L][L^T]$ として，また $\{\phi\}=[L^T]^{-1}\{\psi\}$ とおいてこれらを式(5)に代入し，両辺に左から $[L]^{-1}$ をかけると $[L]^{-1}[K][L^T]^{-1}\{\psi\}=p[L]^{-1}[L]\{\psi\}=p\{\psi\}$ となり，$[M]=[L]^{-1}[K][L^T]^{-1}$ とおくと結局，標準固有値問題 $[M]\{\psi\}=p\{\psi\}$ $\cdots$ (7) となる。

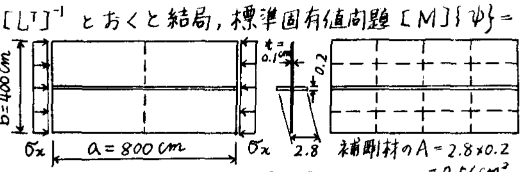

図-4

3. 計算例　図-4のようなモデル(左は4要素，右は16要素)について計算した結果は表-1のようになった。ここで理論式は次の式によった。2)　$\sigma_{cri}=k\cdot\sigma_e$

ただし $k=\dfrac{(1+\alpha^2)^2+3\gamma}{\alpha^2(1+3\delta)}$, $\sigma_e=\dfrac{\pi^2E}{12(1-\nu^2)}\left(\dfrac{t}{b}\right)^2$, また $\gamma=EI/bD$, $\alpha=a/b$, $\delta=A/tb$ とする。なお，特別の場合として，補剛材なしの場合は板の座屈値の理論解 $\sigma_{cri}=0.4741$ kg/cm² に対し，16要素では電算値0.4142 kg/cm²(誤差−13%)を得た。また板厚 $t=0$ とすると，計算モデルを補剛材のみとして理論解 $P_{cri}/A=9.8596\dfrac{EI}{a^2}\dfrac{1}{A}=21.09$ kg/cm² に対し，4要素では電算値 $9.8746\dfrac{EI}{a^2}\dfrac{1}{A}=21.12$ kg/cm²(誤差0.14%)を得た。

表-1 座屈荷重 σ (kg/cm²)

要素数	理論値	電算値
4	1.331	1.116(−16%)
16	1.331	1.364(2.5%)

参考文献　1) Kapur, K. K., Hartz, B. J., "Stability of plates using the finite element method," Proc. A.S.C.E. EM2, 1966.　2) 渡辺：橋梁工学，朝倉書店.　3) 宮本，渡辺，安彦：格子桁理論によるプレートガーダーの座屈耐荷力について，第32回講演概要集.