I-277　　車両－橋梁系の連成非定常ランダム応答の一解法

九州大学工学部　学生員　○大内　実
九州大学工学部　正会員　　彦坂　熙
九州大学工学部　正会員　　内谷　保

1. 緒言

道路橋の走行荷重応答には，路面の不規則凹凸や段差が大きな影響を及ぼすことが知られている。この問題を不規則振動論により取扱い応答の統計量を求めた従来の研究には，定常不規則振動論による解法[1)]のほかに，非定常理論として，車両と橋梁の応答の連成効果を無視する解法[2)]，時間領域のフーリエ級数展開による解法[3)]および共分散方程式による解法[4)]などが見受けられる。本論は，車両－橋梁系の連成運動方程式の解（応答の2乗平均値）が数値積分法によることなく閉じた形で得られる文献3)の手法の特長を生かし，路面凹凸のほかに新たに車両の初期条件をも確率量として扱うとともに，同手法の計算時間を大巾に短縮しうるよう改善を加えた一解法を提示するものである。本法は，未知量を全く増加させることなく連行荷重を取扱いうる利点をも有する。

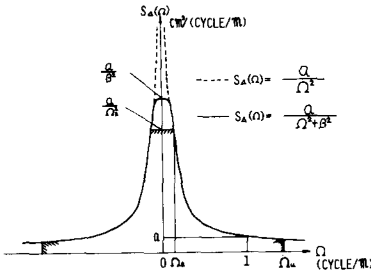
2. 路面凹凸の確率・統計量（図－1参照）

路面の不規則凹凸$\Delta(x)$を平均値が零の定常ランダム過程と見なせば，路面周波数をΩ（cycle/m）として，$\Delta(x)$のパワースペクトル密度関数$S_\Delta(\Omega)$は近似的に次式で表わされる。

$$S_\Delta(\Omega)=\alpha/\Omega^2 \quad (\alpha\text{は定数}) \qquad (1)$$

しかし，上式によれば$\Omega\to 0$のとき$S_\Delta(\Omega)\to\infty$となるので，本解法では$-\infty<\Omega<\infty$において$S_\Delta(\Omega)$を連続関数として扱いうる

$$S_\Delta(\Omega)=\alpha/(\Omega^2+\beta^2) \qquad (2)\quad \text{ただし}\ \beta\ \text{は定数}$$



図－1　路面凹凸のパワースペクトル密度

を用いる。車両が一定速度vで走行するとき，$x=vt$における路面凹凸$\Delta(vt)$は周波数$\omega=2\pi v\Omega$の鉛直加振源となり，式(2)を用いる場合の$\Delta(vt)$の自己相関関数$R_\Delta(\tau)$が次式で与えられる。

$$R_\Delta(\tau)=(\pi\alpha/\beta)EXP(-b|\tau|), \qquad \text{ただし}\quad b=2\pi v\beta \qquad (3)$$

車両が支間ℓの橋上を通過するのに要する時間を$T(=\ell/v)$とし，$\Delta(vt)$を$0\leq t\leq T$の領域でフーリエ正弦級数に展開すれば

$$\Delta(vt)=\sum_m B_m\sin\alpha_m t, \quad (4) \qquad \text{ここに}\quad \alpha_m=m\pi/T, \quad B_m=\frac{2}{T}\int_0^T\Delta(vt)\sin\alpha_m t$$

確率変数B_m $(m=1,2,\cdots)$の共分散行列$E[\{B_m\}\{B_m\}^T]$における共分散要素$E[B_mB_n]$は，式(3),(4)より容易に次のように求められる。

$$E[B_mB_n]=\left\{\begin{array}{l}\frac{\pi\alpha}{\beta}\left(\frac{2}{T}\right)^2\frac{1}{b^2+\alpha_m^2}\left[bT+\frac{2\alpha_m^2}{b^2+\alpha_m^2}\left\{1-(-1)^m EXP(-bT)\right\}\right]\\ \frac{\pi\alpha}{\beta}\left(\frac{2}{T}\right)^2\frac{\alpha_m\alpha_n}{(b^2+\alpha_m^2)(b^2+\alpha_n^2)}\left[1+(-1)^{m+n}-\left\{(-1)^m+(-1)^n\right\}EXP(-bT)\right]\end{array}\right\} \quad (5)$$

3. 非定常ランダム応答の2乗平均値

車両を1自由度系のsprung-massにモデル化し，固有円振動数をω_0，減衰定数をh_0とすれば，その運動方程式は図－2を参照して

$$\ddot{Z}+2h_0\omega_0\{\dot{Z}-\dot{Y}_v-\dot{\Delta}(vt)\}+\omega_0^2\{Z-Y_v-\Delta(vt)\}=0 \qquad (6)$$

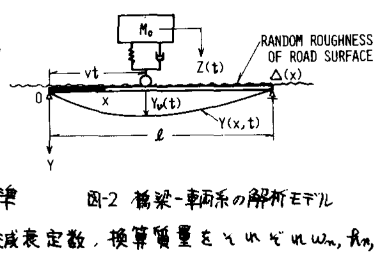


図-2　橋梁-車両系の解析モデル

橋梁はモーダルアナリシスにより多自由度系として扱うことができるが，簡単のために単純桁橋のように動たわみ$Y(x,t)$が1次振動モード$\varphi(x)$と基準座標$Q(t)$の積で表わされる場合について説明する。橋梁の固有円振動数，減衰定数，換算質量をそれぞれω_n, h_n, M_nとすれば，$Q(t)$に関する方程式は

$$\ddot{Q}+2h_n\omega_n\dot{Q}+\omega_n^2Q=\frac{1}{M_n}P_0\varphi(vt)\left(1-\frac{\ddot{Z}}{g}\right) \qquad (7)$$

ランダム応答 $Z(t)$, $Q(t)$, および $Y_v(t)=\varphi(vt)Q(t)$ の期待値からの偏差をそれぞれ $z(t)$, $q(t)$, $y_v(t)=\varphi(vt)q(t)$ とすれば，偏差に関する方程式は次のようになる。

$$\ddot z + 2h_0\omega_0\dot z + \omega_0^2 z = 2h_0\omega_0\{\dot y_v+\dot\Delta(vt)\}+\omega_0^2\{y_v+\Delta(vt)\} \tag{8}$$

$$\ddot q + 2h_n\omega_n\dot q + \omega_n^2 q = -\frac{P_0}{M_n g}\varphi(vt)\ddot z \tag{9}$$

ただし，式(8)の $2h_0\omega_0\{\dot y_v+\dot\Delta(vt)\}$ の項が本題の応答に及ぼす効果は極めて小さいので無視することができる。

いま，応答 $q(t)$ を $0\le t\le T$ の領域でフーリエ正弦級数に展開できるものとする。すなわち

$$q(t)=\sum_m A_m\sin\alpha_m t \tag{10}$$

式(4),(10)を(8)の右辺に代入し，車両のランダム初期条件を $z(0)=z_0$，$\dot z(0)=\dot z_0$ とすれば，応答 $z(t)$ が

$$z(t)=\sum_m A_m\gamma_m(t)+\sum_m B_m\mu_m(t)+z_0\nu_1(t)+\dot z_0\nu_2(t) \tag{11}$$

の形で求められる。ここに，$\gamma_m(t)$, $\mu_m(t)$, $\nu_1(t)$, $\nu_2(t)$ は式(8)の Duhamel 積分より得られる確定関数である。

式(11)を(9)の右辺に代入して $q(t)$ を求めれば

$$q(t)=-\sum_m A_m\lambda_{1m}(t)+\sum_m B_m\lambda_{2m}(t)+z_0\lambda_3(t)+\dot z_0\lambda_4(t) \tag{12}$$

ここに，$\lambda_{1m}(t)$, $\lambda_{2m}(t)$, $\lambda_3(t)$, $\lambda_4(t)$ は式(9)の Duhamel 積分より得られる確定関数である。

さて，式(10)のフーリエ級数の第 i 項の展開係数 A_i は次式で与えられる。

$$A_i=\frac{2}{T}\int_0^T q(t)\sin\alpha_i t\,dt \quad (i=1,2,\cdots) \tag{13}$$

式(12)を(13)に代入して積分を行なえば，次の代数方程式を得る。

$$A_i=-\sum_m C_{im}A_m+\sum_m D_{im}B_m+F_{1i}z_0+F_{2i}\dot z_0 \tag{14}$$

ここに，C_{im}, D_{im}, F_{1i}, F_{2i} は確定定数。

上式は，未定係数 $A_m (m=1,2,\cdots)$ に関する次の連立1次方程式に書き換えられる。

$$[(C_{im}+\delta_{im})]\{A_m\}=[D_{im}]\{B_m\}+\{F_{1i}\}z_0+\{F_{2i}\}\dot z_0 \tag{15}$$

ただし，δ_{im} は Kronecker のデルタ記号である。上式において，確率変数 B_m, z_0, $\dot z_0$ は互いに独立とすれば共分散行列 $E[\{A_m\}\{A_m\}^T]$ が次式で表わされる。

$$E[\{A_m\}\{A_m\}^T]=[(C_{im}+\delta_{im})^{-1}]\Big([D_{im}]E[\{B_m\}\{B_m\}^T][D_{im}]^T+\{F_{1i}\}\{F_{1i}\}^T E[z_0^2]+\{F_{2i}\}\{F_{2i}\}^T E[\dot z_0^2]\Big)[(C_{im}+\delta_{im})^{-1}]^T \tag{16}$$

最後に，所要の応答 $q(t)$, $\dot q(t)$ の2乗平均値が，式(10)より次のように求められる。

$$E[q^2(t)]=\sum_m\sum_n E[A_mA_n]\sin\alpha_m t\sin\alpha_n t,\qquad E[\dot q^2(t)]=\sum_m\sum_n E[A_mA_n]\alpha_m\alpha_n\cos\alpha_m t\cos\alpha_n t \tag{17}$$

4. 計算例

橋梁は支間 $l=50m$，1次固有振動数2.45Hz，減衰定数0.01とし，車両は総重量 $P_0=13.6$ton，固有振動数2.45Hz，減衰定数0.03 走行速度12m/sec とする。図-3は車両のランダム初期条件の効果を示し，加速度の標準偏差 $\sigma_{\ddot z}(0)=120$cm/sec² に相当する初期条件を与えた場合と，$\sigma_{\ddot z}(0)=0$ とした場合の橋梁の支間中央点の速度応答の標準偏差 $\sigma_{\dot q}(t)$ をプロットして比較したものである。図-4は，式(8)の右辺の $2h_0\omega_0\{\dot y_v+\dot\Delta(vt)\}$ が応答に及ぼす効果を示したもので，本題の応答解析において同項を無視しても差しつかえないことが確認される。

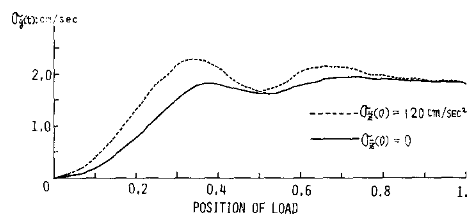


図-3　車両のランダム初期条件の効果

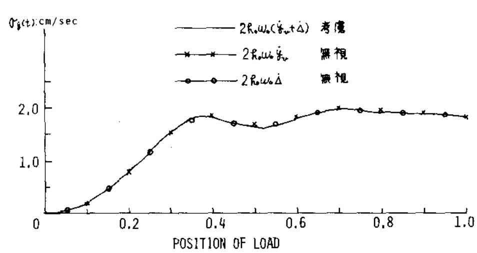


図-4　$2h_0\omega_0\{\dot y_v+\dot\Delta\}$ が応答に及ぼす影響

[参考文献]

1)，山田，小堀：土木学会論文集，No.148，1967.

2)，小堀，梶川：土木学会論文集，No.248，1976.

3)，吉村，彦坂，内谷：土木学会論文集，No.258，1977.

4)，岡林：土木学会第32回年次学術講演会概要集，1977