

長崎大学工学部 正員 岡林 隆敏 明知設計(株) 正員 鏡 修造
建設技術研究所 正員 中井 一彦

1 はじめに 不規則路面凹凸上を走行する車両による、橋梁の不規則応答解析に関しては、単純桁橋、ランガー桁橋、連続桁橋と、種々の橋梁について研究がなされている。しかし、いずれの場合でも、走行車両は、単一走行車両であり、2台以上の走行車両による、橋梁の不規則応答解析に関する研究は、あまりなされていないのが現状である。これは次のような理由によるものと考えられる。すなわち、1台の走行車両の場合でも、橋梁と車両の連成効果および車両の走行に起因する非定常性のために、橋梁の応答は複雑な非定常確立過程になる。さらに、数台走行する場合は、各車両間の干渉効果を考慮しなければならない。しかし実際の橋梁においては、数台の車両が同時に橋梁上を走行することはしばしばあり、2台以上の走行車両による橋梁の応答解析は重要である。本研究は、既に発表した、橋梁-車両-路面系を伊藤形の確率微分方程式で表現する手法と、N台の走行車両の場合に拡張したものである。ここでは、N台の走行車両による橋梁の応答解析の基礎理論を示し、具体例として、2台の車両が走行する場合について、数値計算を行った。本解法の妥当性は対応するシミュレーションにより検証することができた。

2. 橋梁-車両系の運動方程式と路面凹凸のモデル化 図1に示した1自由度系でモデル化された車両が、一定速度Vで走行する際の橋梁と車両の方程式は、次のようになる。橋梁のx点の変位を $y(x,t)$ 、車両の垂直変位を $z(t)$ 、さらに、不規則路面凹凸を $n(t)$ とすると、車両の方程式は次式となる。

$$W_1 \ddot{z} + C(\dot{z} - \dot{y}_n - \dot{n}) + K(z - y_n - n) = 0 \quad (1) \quad \text{ここに、} W_1, C, K \text{ は、各々車両のばね上質量、減衰係数およびばね定数である。なお、} y_n \text{ は、車両直下の橋梁のたわみである。橋梁の} n \text{ 次の基準関数を} \phi_n(x), \text{基準座標を} g_n(t) \text{とすると、橋梁のたわみと、その速度は、}$$

$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) g_n(t)$ 図-1 走行車両のモデル化
 $\dot{y}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \dot{g}_n(t)$ (2) $\ddot{g}_n(t) + 2\zeta_n \omega_n \dot{g}_n(t) + \omega_n^2 g_n(t) = \phi_n(vt) P(t) / M_n^k$ (3) $\dot{g}_n(t) + 2\zeta_n \omega_n \dot{g}_n(t) + \omega_n^2 g_n(t) = \phi_n(vt) P(t) / M_n^k$ (4) となる。ただし、 ζ_n, ω_n は、n 次の減衰定数、固有円振動数、 $P(t)$ は車両の全接地力、 M_n^k はn 次の換算質量で、次式で表される。

$$M_n^k = \int_0^L \phi_n^2(x) dx \quad \text{路面凹凸のパワースペクトル密度を図-2に}$$

示したが、ここでは、路面凹凸のパワースペクトル密度を次式でモデル化する。

$S_P(\omega) = S_0 / (\omega^2 + \beta^2)$; $S_0 = vA(2\pi)^2$, $B = 2\pi\alpha$, $\alpha = 0.05$ (5) これは次式で表される路面系の定常解過程のパワースペクトルである。

$$\dot{n}(t) + \beta n(t) = w(t) \quad (6) \quad w(t) \text{ は} S_0 \text{ のパワースペクトル密度を有する}$$

白色雑音過程。詳細は文献(2)を参照されたし。今、橋梁を1自由度系と仮定し

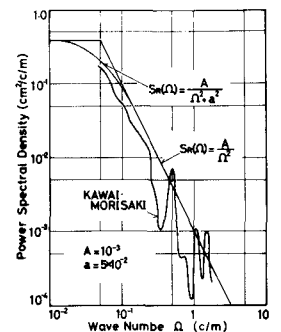
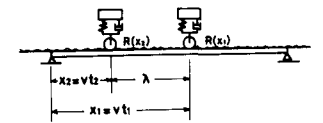
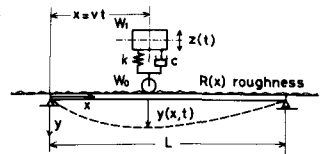
て、 $X(t) = \{z, \dot{z}, y, \dot{y}, n\}^T$ (7) で表される状態変数を定義する 図-2 路面凹凸のパワースペクトル

と、(1)(6)式は、次式の伊藤形の確率微分方程式でベクトル表示される。 $\dot{X}(t) = A(t)X(t) + W(t)$ (8)

ここに、 $W(t)$ は、正規性白色雑音過程ベクトルである。

3. N台の走行車両による橋梁の二乗平均応答解析のための基礎式 車両がN台、順次橋梁に進入した場合、

を考える。i台目の車両による、方程式は、路面凹凸は同一波形式であるので、 $\dot{X}_i(t) = A_i(t)X_i(t) + W(t-t_i)$ (9) となる。ただし、 $X_i(t_i) = X_{i0}$ 。なお、 t_i はi台目の車両の橋梁に到達してから、i台目の進入するまでの時間。従って、N台の車両が作用する橋梁の応答は、次式で与えられる。



$X_i(t) = \sum_{j=1}^N X_{ij}(t)$ (10) 路面凹凸関数を正規過程と仮定したので、応答 $X_i(t)$ も正規過程となる。

ここでは、一般性を失うことなく、平均値を0として、分散のみに注目して解析する。 $X_i(t)$ の分散は、(10)式より、 $E[X_i(t)X_i(t)^T] = \sum_{j=1}^N E[X_{ij}(t)X_{ij}(t)^T]$ (11) となる。従って、 $E[X_i(t)X_i(t)^T]$ の解析は、 $E[X_{1i}(t)X_{1i}(t)^T]$, $E[X_{2i}(t)X_{2i}(t)^T]$, $E[X_{3i}(t)X_{3i}(t)^T]$ の解析に帰着する。ここで、 i 台目の車両に注目する。車両の橋梁に進入して、任意の位置に到達する時間を t とする。(11)式は改めて次式で表される。 $X_{1i}(t) = A_{1i}(t)X_{1i}(t) + W(t)$

— (12) ただし、 $X_{1i}(0) = X_{1i0}$ 。この解は

$$X_{1i}(t) = \Phi_{1i}(t, 0)X_{1i0} + \int_0^t \Phi_{1i}(t, \alpha)W(\alpha)d\alpha \quad (12)$$

で与えられる。ここに、 $\Phi_{1i}(t, \alpha)$ は $X_{1i}(t)$ の状態遷移行列である。

(i) $E[X_{1i}(t)X_{1i}(t)^T]$ の解法 $R_{X_{1i}}(t) = E[X_{1i}(t)X_{1i}(t)^T]$, $R_{X_{1i0}} = E[X_{1i0}X_{1i0}^T]$ すると、 $R_{X_{1i}}(t)$ の応答は、次式の共分散方程式で表される。

$$\dot{R}_{X_{1i}}(t) = A_{1i}(t)R_{X_{1i}}(t) + R_{X_{1i}}(t)A_{1i}^T(t) + Q(t)I, \quad R_{X_{1i}}(0) = R_{X_{1i0}} \quad (14) \quad \text{従って、} E[X_{1i}(t)X_{1i}(t)^T] = R_{X_{1i}}(t-t-t_i) \text{となる。}$$

(ii) $E[X_{2i}(t)X_{2i}(t)^T]$ の解法 (i)の場合と同様に次式を得る。

$$\dot{R}_{X_{2i}}(t) = A_{2i}(t)R_{X_{2i}}(t) + R_{X_{2i}}(t)A_{2i}^T(t) + Q(t)I, \quad R_{X_{2i}}(0) = R_{X_{2i0}} \quad (15) \quad \text{従って、} E[X_{2i}(t)X_{2i}(t)^T] = R_{X_{2i}}(t-t-t_j) \text{となる。}$$

(iii) $E[X_{3i}(t)X_{3i}(t)^T]$ の解法 i 台目の車両が進入して、 j 台目の車両が進入する時間を $t_{ij} = t_i - t_j$ とする。 $X_{3i}(t+t_{ij}) = \Phi_{3i}(t+t_{ij}, t)X_{3i}(t) + \int_t^{t+t_{ij}} \Phi_{3i}(t+t_{ij}, \alpha)W(\alpha)d\alpha$ となるので、両辺に $X_{3j}(t)^T$ を掛けて、両辺の平均を取ると、次式が得られる。

$$E[X_{3i}(t+t_{ij})X_{3j}(t)^T] = \Phi_{3i}(t+t_{ij}, t)E[X_{3i}(t)X_{3j}(t)^T] \quad (16)$$

$$X_{3i}(t) = \Phi_{3i}(t, 0)X_{3i0} + \int_0^t \Phi_{3i}(t, \alpha_1)W(\alpha_1)d\alpha_1 \quad (17)$$

$$X_{3j}(t) = \Phi_{3j}(t, 0)X_{3j0} + \int_0^t \Phi_{3j}(t, \alpha_2)W(\alpha_2)d\alpha_2 \quad (18)$$

ここで、 $E[X_{3i}(t)X_{3j}(t)^T] = R_{X_{3ij}}(t)$, $E[X_{3i0}X_{3j0}^T] = R_{X_{3i0}3j0}$ とすると、(17)(18)式より、次の共分散方程式を得る。

$$\dot{R}_{X_{3ij}}(t) = A_{3i}(t)R_{X_{3ij}}(t) + R_{X_{3ij}}(t)A_{3j}^T(t) + Q(t)I, \quad R_{X_{3ij}}(0) = R_{X_{3i0}3j0} \quad (19) \quad \text{従って、} E[X_{3i}(t)X_{3j}(t)^T] \text{は(16)(19)式より求められる。}$$

(iv) $E[X_{4i}(t)X_{4i}(t)^T]$ の解法 これは、 $E[X_{4i}(t)X_{4i}(t)^T] = E[X_{4i}(t)X_{3j}(t)^T]^T$ の関係より得られる。

4. 数値計算

表-2に示した単純桁橋を対象として、表-1に示した車両が、2台走行する場合のr.m.s.応答を図-3、図-4、図-5に示した。実線は、両車両の相関を考慮した、共分散方程式の解、破線は相関を無視した場合、点線は相関を考慮してシミュレーションである。図-3、図-4は、スパン30mで、車両距離 $\lambda = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ の場合であるが、相関を考慮すると、車両距離により応答形状は、大きく変化する。図-5はスパン50mの場合のそれぞれの応答である。共分散方程式の解とシミュレーションは良い一致を示している。各種のパラメータによる計算結果は、当日発表の予定である。[参考文献]山田小塚:昭和42.12土木学会論文(2)国林:第32回全国大会講演概要]

表-2 道路橋の諸元表

スパン長 (m)	総重量 ($\times 10^3$ Kg)	路面凹凸係数 ($\times 10^{-1}$ Kg/cm ²)	路面係数 (Hz)	スパン長 (m)	総重量 ($\times 10^3$ Kg)	路面凹凸係数 ($\times 10^{-1}$ Kg/cm ²)	路面係数 (Hz)
20	4.84	6.21	6.23	70	19.44	80.15	1.20
30	7.76	12.42	3.79	80	23.36	110.11	1.66
40	10.68	24.41	2.94	90	25.28	171.06	1.50
50	13.60	42.20	2.45	100	28.20	218.01	1.37
60	15.52	65.78	2.11				

表-1 路面凹凸と車両諸元

路面凹凸の0.1mスパン当りの変位 S(D) (cm ² /cm)	共分散方程式 S(D) = 0.001/(D ² + 0.1 ²) a = 0.05	シミュレーション S(D) = 0.004 0.001/D ² D < 0.05 D > 0.05
走行速度 V : 10 (m/sec)		
車両総重量 W : 13 (ton)		
車両固有振動数 f ₀ : 2.5 (Hz)		
車両減衰率 h ₀ : 0.05		

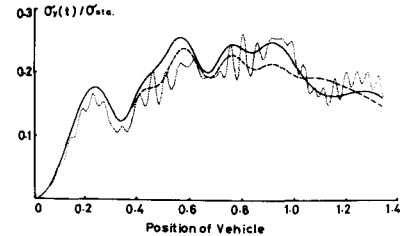


図-3 r.m.s. [わみ]応答 (L=30m, $\lambda=10$ m)

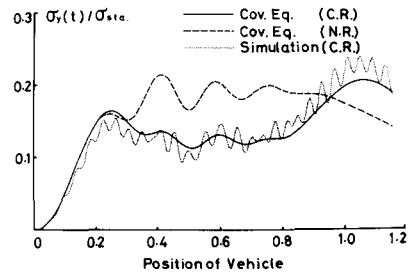


図-4 r.m.s. [わみ]応答 (L=30m, $\lambda=1/3$)

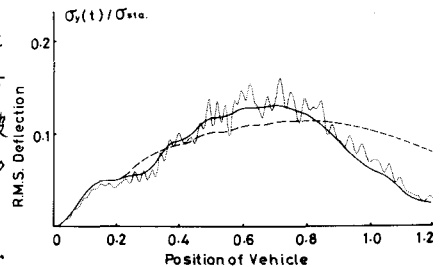


図-5 r.m.s. [わみ]応答 (L=50m, $\lambda=10$ m)