

北海道大学 〇学生員 小田桐 直 幸
北海道大学 正 員 能 町 純 雄
北海道大学 正 員 角 田 与 史 雄

I 概 説

本論文は、速度一定の走行荷重が固体粘性を有するはりの上を移動してゆくときの曲げによる動的応答解析を試みたものである。固体粘性のモデルとしては、基本的にはMaxwellとVoigtの二種が挙げられるが、ある大きさの曲げモーメント M が作用すると瞬時にして $E\eta = M\eta/EI$ のひずみが生ずるのではなく、時間的な遅れがあって終局的な値としてそのひずみに至ると考えられるため、Voigtモデルを採用する。解析は二径間連続ばりで行ない、仮想仕事の原理と重ね合わせの原理を用いることにより変位解及び中間支承反力を求め、数値計算例によってはりの固体粘性がもたらす曲げ振動への影響を調べた。

II Voigtモデル理論

Voigtモデルはバネとダッシュポットの並列系である。これをはりで考えると図-1の様に図化される。この図では圧縮側と引張側に一個ずつしか描かれていないが、実際には断面内に数多く組み込まれているものと考えねばならない。今、はりに動的に曲げモーメントが働くと、Hookeの法則による応力の他にひずみ速度に比例する応力が発生する。ヤング率を E 、ダッシュポットの比例定数を K とすると

$$\sigma = E\varepsilon + K\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = (E + K\frac{\partial}{\partial t})\varepsilon$$

が成立する。内力によるモーメントと外から作用するモーメントとが釣り合

図-1

り合っていないから、断面二次モーメントを I とすると次式が成り立つ。

$$M = - (EI + KI\frac{\partial}{\partial t})\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

従って、曲げ振動の方程式は $q(x,t)$ を荷重強度、 A を断面積、 ρ を材料の単位体積質量として

$$\frac{\partial}{\partial x^2} \left\{ (EI + KI\frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right\} + A\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = q(x,t)$$

で与えられる。この式から、固体粘性のない曲げ振動の断面定数 EI を $(EI + KI\frac{\partial}{\partial t})$ で置き換えればVoigtモデルの粘性減衰振動の方程式が得られることがわかる。

III 二径間連続ばりでの解析

図-2は、与系の二径間連続ばりをふたつの静定基本系に分解したもので、中間支承反力 $X(t)$ は未知である。基本系(0)は、両端支持ばりを荷重が速度一定で進行してゆく状態であるから、変位 y_0 は容易に得られる。一方、基本系(1)は、与系における未知反力 $X(t)$ が固定点 $x=a$ に作用する状態であり、 y_1 も未知である。しかし、作用点 a が固定されているので変位 y_1 は静的に集中力が載荷するときの曲線に近いであろうと考えられ、振幅を時間のみの関数と仮定した。すなわち、静的変位として仮定系の変位 $\bar{y}$ を、時間に依存する応答係数として $h(t)$ を用いると

$$y_1 = h(t) \cdot \bar{y}$$

が近似的に成立すると考えられる。基本系(0)と基本系(1)とを重ね合わせ、与系での中間支承の変位 $=0$ の条件から、 $h(t)$ として次式を得る。

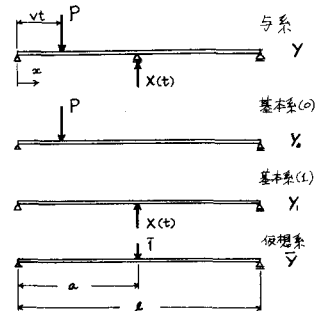
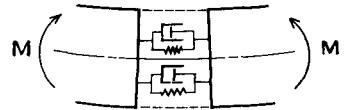


図-2

$$h(t) = -y_0(x=a)/\bar{y}(x=a)$$

$X(t)$ を求めるために基本系(1)から力を、仮想系から分変位をとって仮想仕事の原理を適用すれば、

$$\int_0^l \left\{ -X(t) \cdot \delta(x-a) - AP \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} \right\} \cdot \bar{y} dx = \int_0^l EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x^2} dx$$

となるが、右辺の積分は2度の部分積分の後、境界で $y_1=0$ 及び仮想系において $EI \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x^2} = \bar{I} \cdot \delta(x-a)$ が成立することによって $\bar{I} \cdot y_1(x=a)$ に等しくなる。式(2), (3)を用い式(4)から y_1 を消去すれば、次式になる。

$$-X(t) \bar{y}(x=a) + \frac{AP \int_0^l \bar{y}^2 dx}{\bar{y}(x=a)} \cdot \frac{d^2 y_0(x=a)}{dt^2} = -\bar{I} \cdot y_0(x=a)$$

Vogt モデルのはりの振動方程式(1)を振動形解析法で解くと、荷重進入以前では静止していたとすると、 $y(x,t) = P \cdot \delta(x-vt)$ であるから、断面一定ならば

$$y_0 = \frac{2P}{APl} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{l}}{\sqrt{\frac{P_m^2}{4} - g_m^2}} \int_0^t \exp\left(-\frac{P_m}{2}\lambda\right) \cdot \sinh \sqrt{\frac{P_m^2}{4} - g_m^2} \lambda \cdot \sin \omega_m(t-\lambda) d\lambda$$

$$\text{但し, } P_m = \frac{KI}{AP} \left(\frac{m\pi}{l}\right)^4, \quad g_m^2 = \frac{EI}{AP} \left(\frac{m\pi}{l}\right)^4, \quad \omega_m = \frac{m\pi}{l} v$$

として基本系(1)の変位が得られる。式(6)を式(4)に代入すれば $X(t)$ が解析的に求められる。なお、与梁の変位 y は式(3)により

$$y = y_0 + y_1 = y_0 - \frac{y_0(x=a)}{\bar{y}(x=a)} \bar{y}$$

で与えられる。

IV 数値解析例

先に仮定した式(2)を検討するために、振動形解析法との比較のため $X(t) = X_0 \sin \omega t$ として調和振動解析を行なった結果、精度が十分であるというデータを得た。二径間連続ばりの数値計算は、I 形断面の鋼桁を用いた。データは、 $EI = 4.545 \times 10^{12} \text{ kg cm}^2$, 単位長さ当りの桁の自重 = 3.085 kg/cm, $l = 6000 \text{ cm}$, $a = \frac{l}{2}$ とし、荷重 P の速度 V はスパン長 $l = 6000 \text{ cm}$ の単純支持ばりの危険速度 $\frac{\pi \sqrt{EI}}{l \sqrt{AP}}$ の 0.4 倍とした。

図-3(a)に示したものは、固体粘性のない例と、粘性定数のヤング率に対する比 $\frac{K}{E} = 0.001 \text{ sec}$ の例とを、第一径間中央梁の動的変位影響線として図化したものである。粘性の影響は時間の経過とともに顕著で、特に支承反力に対して大きく現われる。図の横軸は $\frac{t}{l} = 1$ とし、縦軸は変位に静的載荷した時の変位 = 1, 中間支承反力の静的最大値 = 1 として無次元化した。なお、荷重 P の大きさを示さなかったのは、変位及び中間支承反力を求める上では無次元化を行なったため、必要なかったためである。

V あとがき

連続ばりの支承反力を振動形解析によって求めるとき、良好な収束を得ることは大変困難である。これを改良するために、近似的ではあるが支承反力を静的なわけをバネとする変動力と見なして、動的なばりのたわみと適合させて取り扱った。また、その過程において、仮想仕事を用い反力を求める公式を導いた。本方法により、固体粘性の影響を考えた強制振動も処理できることを示し、その数値解を各粘性値について図示することができた。反力はたぶん、静的値を中心にわずかな変動で振動している。

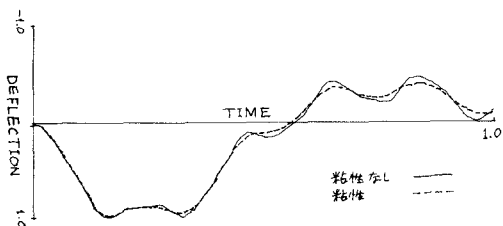


図-3 (a) $x = \frac{a}{2}$ における動的影響線

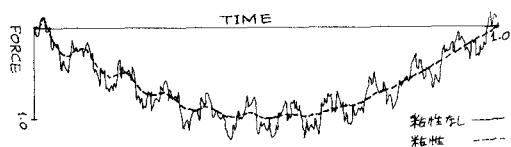


図-3 (b) 中間支承の反力動影響線