I-265　不規則変動軸力を受ける塔状構造物の動的安定性の評価

京都大学大学院　学生員　○野田　茂
京都大学工学部　正　員　山田　善一
岡山大学工学部　正　員　竹宮　宏和

1. まえがき

確率過程論による応用分野は著しく多いが，本研究では構造物の安定挙動の把握にアタックを試みようとしたものである。解析対象構造物は吊橋の塔－基礎系とした．従来の安定性評価は周期動下でのMathieu-Hill微分式の議論の延長上にあるが[1]，一方確率係数を含む動力学系ではモーメントの適正なる評価が重要となる。[2] ここでは，確率を支配する基本式より安定解析を実施し，シミュレーションで検討を加えた．さらにこの理論を応用して，単純モデルの確率統計量を求め，信頼性解析の基礎としたものである。

2. 確率過程論による不安定領域の算定

著者の一部は既に上記吊橋の塔－基礎系について幾つかの興味ある側面を示しているが，[3] 外乱によっては補剛桁などの惹起する塔部の動的不安定現象を賦与する。今この単純力学モデルを図1のように想定する。かかる構造物をケーブルの附加張力 $P(t)$ のみを考慮してF.E.M. で定式化すると，一般に次の形となる．

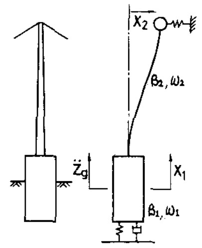

図1　モデル

$$L(\{x(t)\}) = \{F\}\ddot{z}_g(t)\ ,\ L(\ ) = [M]\frac{d^2}{dt^2} + [C]\frac{d}{dt} + ([K] - P(t)[K_G])\quad 但し，P(t) = P_0 + V(t) \quad \text{-----}\ (1)$$

ここで，P_0 は死荷重を，$V(t)$ は平均値零で任意のスペクトル密度を有する不規則な変動軸力を意味する。これに対して，Markov Vector 法によってFokker Planck 式を形成する。そして状態ベクトルを乗じて項別積分法を導入すると，モーメント式が誘導できる。そのとき，このモーメント μ を評価するには高次項の効果が残り解析的に困難であるので，ここでは別の手法を採っている。モーメント項は次式の関係を満たす。

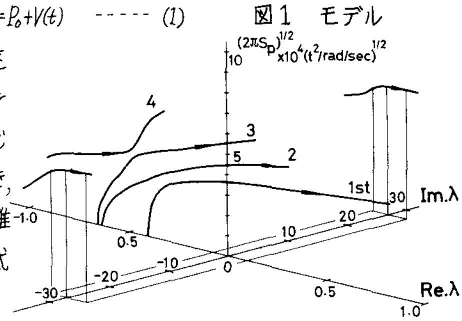

図2　固有値曲線　$\alpha=0.2$, $V_s=650m/sec$

$$\{\dot{\mu}_{N=1}\}_i = f_i\{\mu_{N=1}, \mu_{N=2}, \mu_{N=3}\}\ ,\ \{\dot{\mu}_{N=2}\}_j = f_j\{\mu_{N=2}, \mu_{N=3}, \mu_{N=4}\} \quad \text{-------}\ (2)$$

そこで，応答のガウス性を仮定：$E[x_i x_j x_k x_\ell] \simeq E[x_i x_j]E[x_k x_\ell] + E[x_i x_k]E[x_j x_\ell] + E[x_i x_\ell]E[x_j x_k] - 2E[x_i]E[x_j]E[x_k]E[x_\ell]$　：　すると非線形確率微分方程式を受る。その式の複雑さに比べてそれ程の精度向上にならないので，この近似解を試みる。

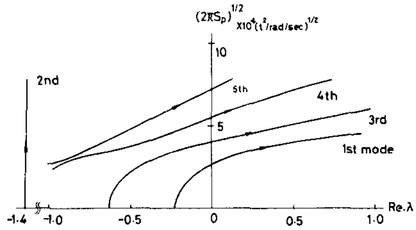

図3　固有値曲線　$\alpha=0.2$, $V_s=1100m/sec$, $\beta_1=2\%$

仮に $V(t)$ が広帯域不規則波である典型的ケースで検討すると，伊藤形の確率微分方程式を仲介に，2次モーメント$[\Sigma]$に関して，

$$[\dot{\Sigma}] = [R][\Sigma] + [\Sigma][R]^T + 2\pi S_0[\{Q\}\{Q\}^T] + (Nonlinear\ terms) \quad \text{------}\ (3)$$

ここで，$[R] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix}$ ，$\{Q\} = [M]^{-1}\{F\}$，$E[\ddot{z}_g(t)\ddot{z}_g(t+\tau)] = 2\pi S_0\delta(\tau)$ ，$(\cdot \equiv \frac{d}{dt})$

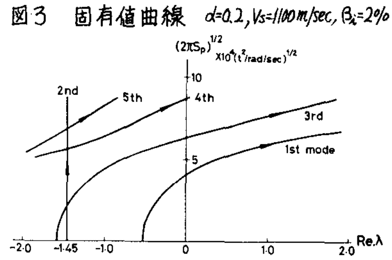

図4　固有値曲線　$\alpha=0.2$, $V_s=1100m/sec$, $\beta_1=5\%$

一方，新たに1階の微分方程式で記述すると，

$$\{\dot{\mu}_{N=2}\} = [G(system\ parameter/parametric\ intensity)]\{\mu_{N=2}\} + \{\bar{F}\} \quad \text{------}\ (4)$$

従って，2乗平均安定はマトリックス$[G]$ のRouth-Hurwitz規範で複素固有値解析を通して検証される。

今，文献(3)で得た振動特性上で処理された確率過程論的安定に関して図2では固有値曲線として，変動軸力の強度 S_pを変化させて調べたもので，同図中に基礎の挙動に支配されるモードは常に安定であることがわかる。地盤領域の効果は振動変化と併せて若干異なる安定領域に移行する。図3,4は同じ固有値曲線のS_p-$Re.\lambda$ 平面への

射影図を塔部のダンピングをパラメーターに掲げたものであるが，対象系の安定化が限界荷重の増大として現われる。この限界荷重算定における本手法の妥当性を検討するために，シミュレーションを併せて行なった結果推定可能で，その一例が図5であり，不安定現象の確認が得られた。ところで，Bolotinに代表される古典的安定性理論（Sinusoidal波）も，本確率過程論で評価しても基本的傾向の対応は一致する。すなわち，基本振動数の2倍近傍で主不安定領域を2分する。図6にはこの領域を示しているが，系の振動状態も併わすと興味ある結果を得ており，領域の拡がりからみて耐震的かつ構造安定上の配慮が必要であることがわかった。

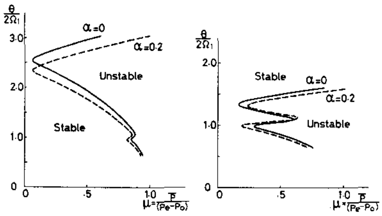

図5　不安定領域

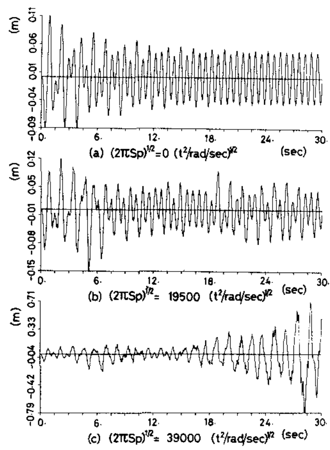

図6　変位応答　$\alpha=0.2$, $V_s=300m/sec$

3. 安定問題における統計的考察

上記系では塔頂部の軸力をパラメトリック変動として直接取り扱ったが，次に図1で示す鉛直外乱の効果を検討するために統計量を求めてみた。解析対象系（2d.f）の運動方程式は，

$$[M]\{\ddot{X}\}+[C]\{\dot{X}\}+([K]-\alpha\ddot{x}_1[K_G])\{X\}+\{\psi(\{X(t)\})\}=\{F\}\ddot{z}_g(t) \quad \text{------} \quad (5)$$

ここに，$[M]=[I]$，$[C]=[\diagdown 2\beta_i\omega_i \diagdown]$，$[K]=[\diagdown \omega_i^2 \diagdown]$，$[K_G]=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$，$\{F\}^T=(1,0)$

$\{\psi(X)\}=\alpha\begin{Bmatrix}-\beta\\ \alpha x_2\end{Bmatrix}(\dot{x}_2^2+x_2\ddot{x}_2)$，　但し，$\{X\}^T=(x_1,x_2)$，　α,βは系の幾何などに依存するパラメーター。この場合も同様にガウス仮定による高次モーメントの消去により，非線形連成確率微分方程式を得る。$\tau=\omega_1 t$ なる無次元表示，状態ベクトル$\{u\}^T=(\{X\}^T,\{\dot{X}\}^T)$を用いると，1次モーメント$\{m_i\}=E\{u\}$については式(6)で非線形項$\{S_i\}$が，2次モーメントでは式(7)の非線形項$[Y_{ij}]_{sym.}$が加わったものである。

$$\{\dot{m}_i\}=[R]\{m_i\}+\{S_i\} \quad \text{-------} \quad (6)$$

これら非線形項を具体的に書き下すと，　$S_3=\alpha\beta\{\Sigma_{44}-2\beta_2 r\Sigma_{24}-r^2\Sigma_{22}-\beta(A_1+2A_2)\}$，$S_4=-\alpha(\Sigma_{12}+2\beta_1\Sigma_{23})+\alpha\delta(2\beta_2 rA_3+r^2A_4-A_5)$

$Y_{13}=\alpha\beta\{A_{14}-2\beta_2 rA_{16}-r^2A_1-\alpha(2\beta_1A_9+A_{15})\}$，　$Y_{14}=-\alpha(2\beta_1A_{16}+A_{17})+\alpha^2\delta(2\beta_2 rA_9+r^2A_{18}-A_{19})$

$Y_{23}=\alpha\beta\{A_5-2\beta_2 rA_{19}-r^2A_4-\alpha(2\beta_1A_{20}+A_{18})\}$，　$Y_{24}=-\alpha(2\beta_1A_2+A_1)+\alpha^2\delta(2\beta_2 rA_{12}+r^2A_{21}-A_{11})$，　$Y_{33}=2\alpha\beta\{A_6-2\beta_2 rA_7-r^2A_2-\alpha(2\beta_1A_8+A_9-2\pi S_0\Sigma_{22})\}$

$Y_{34}=\alpha\{2\pi S_0m_2+\delta A_{22}-A_{16}-2\beta_2\delta rA_5-2\beta_1A_{23}-\delta r^2A_{19}\}+\alpha^2\{2(\delta\beta_1 r-\beta_1\beta)A_{24}-\beta A_{25}+\delta r^2A_{21}-\delta A_{26}\}$，$Y_{44}=-2\alpha[(2\beta_1A_7+A_{10})-\alpha\{\pi S_0\Sigma_{22}+\delta(2\beta_2A_{11}+r^2A_{12}-A_{13})\}]$

$A_1\sim A_{26}$に関しては，　　$r=\omega_2/\omega_1$，$\delta=1-\alpha$，　その他，零　------ (7)

$A_1=m_1(\Sigma_{22}-2m_2^2)+2m_2\Sigma_{12}$，　$A_2=2m_2(\Sigma_{23}-m_2m_3)+m_3\Sigma_{22}$，　$A_3=2m_2(\Sigma_{24}-m_2m_4)$，　$A_4=m_2(3\Sigma_{22}-2m_2^2)$

$A_5=m_2(\Sigma_{44}-2m_4^2)+2m_4\Sigma_{24}$，　$A_6=m_3(\Sigma_{44}-2m_4^2)+2m_4\Sigma_{34}$，　$A_7=m_2(\Sigma_{44}-2m_3m_4)+m_3\Sigma_{24}+m_4\Sigma_{23}$

$A_8=\Sigma_{22}\Sigma_{33}+2\Sigma_{23}^2-2(m_2m_3)^2$，　$A_9=2\Sigma_{12}\Sigma_{23}+\Sigma_{13}\Sigma_{22}-2m_1m_2^2m_3$，　$A_{10}=m_1(\Sigma_{24}-2m_2m_4)+m_2\Sigma_{14}+m_4\Sigma_{12}$

$A_{11}=\Sigma_{22}\Sigma_{44}+2\Sigma_{24}^2-2(m_2m_4)^2$，　$A_{12}=3\Sigma_{22}\Sigma_{24}-2m_2^3m_4$，　$A_{13}=3\Sigma_{44}\Sigma_{24}-2m_2m_4^3$，　$A_{14}=2m_1(\Sigma_{44}-m_4^2)+m_4\Sigma_{14}$

$A_{15}=\Sigma_{11}\Sigma_{22}+2\Sigma_{12}^2-2(m_1m_2)^2$，　$A_{16}=m_1(\Sigma_{23}-2m_2m_3)+m_2\Sigma_{13}+m_3\Sigma_{12}$，　$A_{17}=2m_1(\Sigma_{12}-m_1m_2)+m_2\Sigma_{11}$，　$A_{18}=3\Sigma_{22}\Sigma_{12}-2m_1m_2^3$

$A_{19}=\Sigma_{12}\Sigma_{44}+2\Sigma_{14}\Sigma_{24}-2m_1m_2m_4^2$，　$A_{20}=3\Sigma_{22}\Sigma_{23}-2m_2^3m_3$，　$A_{21}=3\Sigma_{22}^2-2m_2^4$，　$A_{22}=3m_4\Sigma_{44}-2m_4^3$

$A_{23}=m_2(\Sigma_{33}-2m_3^2)+2m_4\Sigma_{34}$，　$A_{24}=\Sigma_{22}\Sigma_{34}+2\Sigma_{23}\Sigma_{24}-2m_2^2m_3m_4$，　$A_{25}=\Sigma_{14}\Sigma_{22}+2\Sigma_{12}\Sigma_{24}-2m_1m_2^2m_4$，$A_{26}=2\Sigma_{24}\Sigma_{34}+\Sigma_{44}\Sigma_{23}-2m_2m_3m_4^2$

先ず安定性に寄与する量は外乱$\ddot{z}_g(t)$の強度S_0という形で考慮される。従って，2．との本質的差異　----- (8)

を生じるが，時系列上で step by stepに統計量を求め判断しなければならない。S_0の変化に対する塔の応答をみると，$\alpha\ddot{x}_1$ のフィルターが系の振動数の2倍程度の範囲で不安定性が生じた。その詳細は講演時に発表予定である。

4. あとがき　本研究での近似計算式で安定解析が可能である。御協力を得た家村浩和講師に謝意を表します。

参考文献

(1) Bolotin ,V.V.,"The Dynamic Stability of Elastic Systems", Holden-Day,1964

(2) Curtain,R.F.,"Stability of Stochastic Dynamical Systems", Springer-Verlag, 1972

(3) Yamada,Y., H.Takemiya and K.Kawano,"Random Response Analysis of a Nonlinear Soil-Suspension Bridge Pier System", Int. Jour. of E.E.S.D. (to apper in Vol.6)