

長崎大学工学部 正員・高橋和雄
日本電炉 堤 友慈

1. 緒言 著者らはトラス橋やアーチ橋の腹材(吊材もしくは支柱)として採用されている細長比の大きい部材の幾何学的非線形性にもとづく振動問題の解析を行っている。構造部材として使用される場合には当然ながら死荷重による初期軸力や架設時からの温度変化による温度応力が作用することになる。本研究ははり部材の非線形振動に及ぼす初期軸力の影響について解析結果を報告するとともに実験との比較も併せて行ったものである。

2. 運動方程式 端部で軸方向変位が拘束された細長いはりに一様分布の周期外力および初期軸力が作用する場合の運動方程式は次のように与えられる。

$$P = \bar{P} - \frac{EA}{2l} \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx \quad (1) \quad L(y, P) = EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + P A \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - P_0 \cos \Omega t = 0 \quad (2)$$

ここに、 l : はりの部材長、 E : ヤング率、 A : 断面積、 I : 断面2次モーメント、 y : たわみ、 x : 支点からの距離、 P : 単位体積質量、 C : 粘性減衰係数、 $\bar{P}$: 初期軸力、 P : はりに作用する全軸力、 P_0 : 外力の荷重強度、 Ω : 外力の円振動数、 t : 時間 運動方程式において非線形項は振幅によつて生ずる軸力である。

3. 多自由度系解析法 式(1)および式(2)を解くために、はりのたわみ y を次のように変数分離形に仮定する。

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t) \quad (3) \quad \text{ここに、} X_n: \text{境界条件を満足する座標関数、} T_n(t): \text{未知の時間関数}$$

式(3)の座標関数として軸力の作用しないはりの線形振動の標準関数を用いるものとする。式(2)を式(3)に代入してゼロにならないので Galerkin 法を適用する。すなわち、 $\int_0^l L(y, P) X_n dx = 0 \quad (4) \quad 1$ に代つて、

$$\ddot{T}_n + \alpha_n^2 \dot{T}_n + \bar{P} \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm}^* T_m + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{nlm}^* T_l T_m T_n = \bar{P}_0 \cos \Omega t \quad (5)$$

$$\text{ここに、} \alpha_n = \left(\frac{\lambda_n^2}{\lambda_1^2} \right), \quad \delta_n = \int_0^l X_n^2 dx, \quad \beta_{nlm}^* = -\frac{1}{2} \int_0^l \frac{dX_n}{dx} \frac{dX_l}{dx} \frac{dX_m}{dx} dx \int_0^l \frac{dX_n}{dx} X_n dx / (\lambda_1^4 \delta_n), \quad \bar{P} = P l^3 / EI r, \quad \bar{P}_0 = \int_0^l X_n dx / (\lambda_1^4 \delta_n)$$

$$\tau = \omega_1 t, \quad \bar{\omega} = \Omega / \omega_1, \quad K_{nm}^* = \frac{5}{8} \int_0^l \frac{dX_n}{dx} \frac{dX_m}{dx} X_n dx, \quad \bar{P}_0 = P_0 / P_r, \quad \lambda_n = l \sqrt{PA \omega_1^2 / EI}, \quad \varepsilon: \text{オイラーの座屈係数(両端ヒンジのとき} \pi, \text{固定のとき} 2\pi), \quad \xi = x/l, \quad \omega_1: \text{初期軸力} P_0 = 0 \text{ の場合のはりの対称1次固有円振動数。}$$

上式は連立の非線形常微分方程式である。非線形項の他に軸力を含む項に連成が見受けられる。これは初期軸力 $\bar{P}$ の大きさに依存して振動波形が変化することを意味するものである。ただし、両端ヒンジはりの自由振動では振動時の軸力の大きさに無関係に正弦波で与えられるために、1自由度系として取り扱うことができる。式(5)の定常解を求めるにあたって調和バランス法を適用する。式(5)の非線形値元力がすべて3次式であることを考慮のうえ、解を次のようにフーリエ級数に仮定する。

$$T_n = \sum_{i=1}^{\infty} Q_n^i \cos i \bar{\omega} \tau \quad (6)$$

式(6)を式(5)に代入して調和バランス法を適用すれば未定 n 数 Q_n^i を求めるための連立非線形代数方程式がえられる。任意の振動数比 $\bar{\omega}$ に対して適当な初期値を与えれば、Newton-Raphson 法を用いて Q_n^i が決定される。なお、振動時にはりに作用する軸力比の時間的変形は式(1)から次のように与えられる。

$$\bar{P} = \bar{P}_0 - \frac{EA}{2l} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f_{nm} T_n T_m \quad (7) \quad \text{ここに、} f_{nm} = \int_0^l \frac{dX_n}{dx} \frac{dX_m}{dx} X_n dx$$

4. 解析結果 図-1に両端ヒンジはり(HH)と両端固定はり(CC)の1次振動の振動数比 $\bar{\omega}$ と振幅比 A との関係と初期軸力比 $\bar{P}_0$ (初期軸力 P_0 /オイラーの座屈荷重 P_r)をパラメーターにプロットした結果を示す。 $\bar{P}_0 > 0$ は圧縮

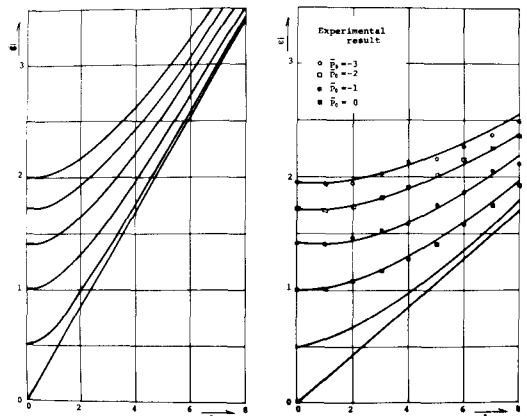


図-1 Relations between amplitude ratio A and frequency ratio $\bar{\omega}$
(a) HH (b) CC

力の領域に対応し、また $\bar{R} < 0$ は引張力の領域に対応するものである。 $\bar{R} = 1$ のオイラーの座屈荷重の場合には線形振動では復元力を荷重に等しいために無周期運動をするが、非線形振動では振幅比は振幅比に比例して増大する。初期軸力の影響は圧縮力の領域でかつ振幅比の小さい領域で敏感であるが、振幅比の大きい領域では小さくなる。CC の場合には振動実験結果をプロットしたが、理論値とよく対応していることがわかる。

HH 以外のはりでは振幅による軸力のために振動形は振幅とともに γ に変化する。図-2 は初期軸力 $\bar{R}_0 = 0, -2$ に対するはりの4分の1点の振幅と中央の振幅の比 γ と振幅比 A の関係をプロットしたものである。図のように γ は振幅と共に増加し、端部がふくらんだ偏平な形に変化していくことがわかる。

式(7)からはりの作用する軸力の大きさを求めることができる。

図-3 は HH と CC のはりの振動時にはりの生ずる軸力の変動範囲である。

すなわち、振幅比 A で振動するはりの軸力は $\bar{R} \sim \bar{R}_0$ の範囲で変動する。細長比の大きい部材では曲げに対する剛性 EI/ρ は小さいが、軸方向の伸び剛性 EA は長さの影響を受けないから、振幅による軸力に対応するはりのオイラーの座屈荷重の数倍に及ぶので格点の疲労強度や応力度の推定には、曲げ応力のせうらず振幅による軸応力と考慮する必要がある。なお、振動時にはりに生ずる各振幅の軸力の絶対値 $P = E\epsilon^2 EA/\rho^2$ は境界条件によらずに一定である。

$\bar{R}_0 = -1$ に対する定常強制振動の応答曲線を図-4 に示す。なお、横軸は初期軸力のないはりの線形1次固有振動数で無次元化されている。図中において、 $\bar{\omega} = 1.4$ 付近に生ずる共振は1次振動の主共振で、また、 $\bar{\omega} = 0.28$ 付近の共振は分岐的に生ずる1次振動の5倍の高調波共振および $\bar{\omega} = 0.46$ 付近の共振は連続的に生ずる3倍の高調波共振である。 $\bar{\omega} = 1.2, 2.1$ および 2.7 付近の共振はそれぞれ対称2次振動の5倍、3倍および3次振動の高調波共振である。初期引張力が存在するので非線形項の寄与が、 $\bar{R}_0 = 0$ の場合よりも少なくなるために、応答曲線の振幅依存性は小さい。○印は掃引周波数を増加させた場合の実験値、また、×印は掃引周波数を減少させた場合の実験値である。1次振動の振動数と振幅の関係は理論値と実験値がよく一致している。

参考文献

- 1) Takahashi, K., Nonlinear Free Vibrations of Beams, Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 24, pp. 109-120 (1976)

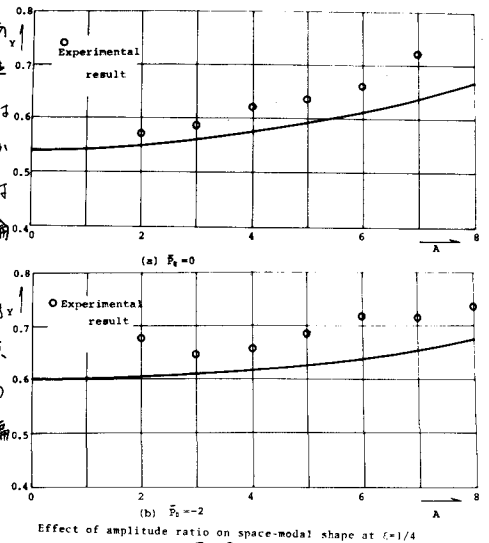


図-2

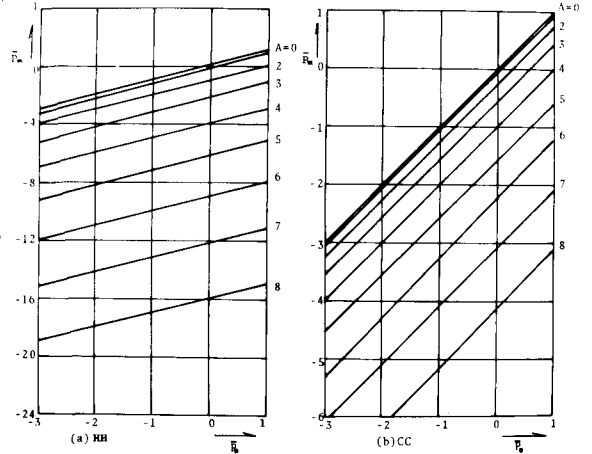


図-3

Relation between initial axial force and maximum axial force

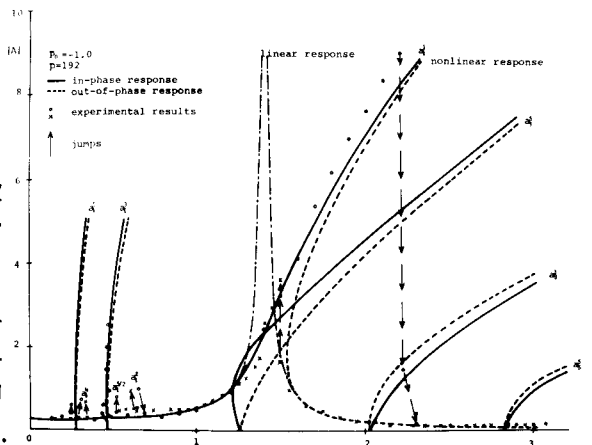


図-4

Nonlinear frequency response for $p=192$