I-261　無限に長い板の振動について

信州大学　正員　○石川清志
飛島建設(株)　正員　谷本勉之助
信州大学　正員　夏目正太郎

1. はじめに　本報告書は，直角座標(x,y)において，x方向に無限に長く，y方向に関して有限幅をもつ曲げ剛性一定な均質等方性板に，板の局部に強制的なたわみおよびたわみ速度を与えた板の自由振動解析である．xの無限に長い境界に対してFourier積分の解を採用し，yの有限な境界に関して固有関数で表わされ，初期条件で解く方法である．動的問題におけるFourier積分の応用は無限に長い境界をもつ系に適応され，与えられた初期条件のもとで解く方法が一般である．とくに，無限長梁，幅の広い膜等に局部的作用の初期条件で解く方法は古来からよく知られた動的解析であり，今日すでに解決済である．しかしながら，無限の境界を表わすところのFourier積分と，有限境界による固有関数の組み合せからなる板の振動解析は我々の知る限りではあまり試みられていないように思われる．

本報告書は，無限の境界によるFourier積分の変数γに従属して，有限の境界による固有関数が誘導されるが，この固有関数の取り得る固有値すなわち円振動数ω_nはγと一定な関係があり，yの境界条件により異る．また，固有関数は，単純支持-単純支持を除いた通常の境界条件に対して固有関数の直交性がなく，ここでは固有関数を別系列の直交関数列で再展開して解析を行う．与える初期条件については，無限板の中央に，部分分布したたわみおよびたわみ速度を時刻$t=0$の瞬時に与え，Fourier積分はSimpson数値積分を用いて行う．

2. 解析について　曲げ剛性一定な均質等方性板の振動方程式は次のように表わされる．

$$\nabla^4 w = -c^2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\qquad c^2=\frac{\rho}{D}. \tag{1}$$

wは板のたわみ，Dは曲げ剛性，ρは密度である．xに関して無限，yに関して有限な境界条件について式(1)を満足する解wは次のように表わされる．

$$w=\int_0^\infty d\gamma\sum_{n=1}^\infty\lfloor \cos\alpha y\quad \sin\alpha y\quad \cos\beta y\quad \sin\beta y\rfloor_n N_n\begin{bmatrix}\cos\gamma x\cos\omega t\\ \cos\gamma x\sin\omega t\\ \sin\gamma x\cos\omega t\\ \sin\gamma x\sin\omega t\end{bmatrix}_n,\qquad N_n=\begin{bmatrix}A_1 & A_2 & A_3 & A_4\\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4\\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4\\ D_1 & D_2 & D_3 & D_4\end{bmatrix}_n. \tag{2}$$

ここに，$\alpha=\sqrt{c\omega-\gamma^2}$，$\beta=\sqrt{c\omega+\gamma^2}$，$N_n$は未定積分常数である．

境界条件を満たすようにすると，γに従属して，固有値方程式と固有関数$Y_n(y)$が求まり，式(2)は次のように表わされる．

$$w=\int_0^\infty d\gamma\sum^\infty Y_n(y)\lfloor\cos\omega t\quad \sin\omega t\rfloor_n \Omega_n\begin{bmatrix}\cos\gamma x\\ \sin\gamma x\end{bmatrix},\qquad \Omega_n=\begin{bmatrix}D_1 & D_3\\ D_2 & D_4\end{bmatrix}_n. \tag{3}$$

γを与えることにより，固有値方程式を満足するω_nを求めることができる．そのため，Fourier積分をSimpson数値積分の分割ステップでγに数値を与えると，γとω_nの関係は次のように対応して定義することができる．

$$\begin{array}{llll}\gamma_0: & \omega_{01} & \omega_{02} & \omega_{03} \;\cdots\\ \gamma_1: & \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{12} \;\cdots\\ \gamma_2: & \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \;\cdots\\ \cdots: & \cdots & \cdots & \cdots \;\cdots\end{array}$$

yの境界条件を固定－自由とした場合，γとω_nの関係は図-1のように示される．板の曲げ振動における初期条件，たとえば

$$\begin{bmatrix} w \\ \frac{\partial w}{\partial t}\end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y)\end{bmatrix}, \qquad (4)$$

を与えることによって，Ω_nを決定することができれば，終局において，境界，初期条件を満足する$0<t$における板の自由振動は完全に解決し得ることになる．式(4)の右辺既知項をFourier積分で書き換えると

$$\begin{bmatrix}u(x,y)\\v(x,y)\end{bmatrix} = \int_0^\infty \Phi(\gamma)\begin{bmatrix}\cos\gamma x\\ \sin\gamma x\end{bmatrix} d\gamma,\quad \Phi(\gamma)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\begin{bmatrix}u(\xi,y)\\v(\xi,y)\end{bmatrix}\lfloor \cos\gamma\xi \;\; \sin\gamma\xi \rfloor d\xi. \qquad (5)$$

式(3)，(4)，(5)から，γについて，次の方程式を得る．

$$\sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y)\begin{bmatrix}1&0\\0&\omega\end{bmatrix}_n \Omega_n = \Phi(\gamma). \qquad (6)$$

$Y_n(y)$は単純支持－単純支持以外の境界条件の場合，$Y_n(y)$の直交性はなく，別系列の直交関数列Fourier sine級数で再展開してΩ_nを決定する．

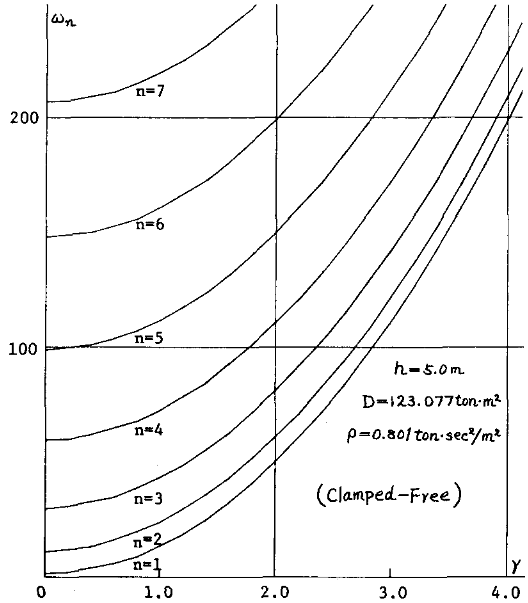

Fig. 1. Relationship between γ and ω_n

3. 数値計算例

図-2に示すように，境界条件は固定－自由とし，初期条件は初期速度$v(x,y)$のみを与えるものとする．

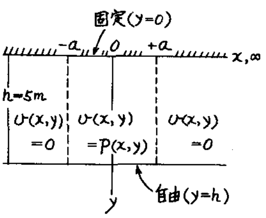

図-2．初期速度の作用領域

$v(x,y)$の関数および作用領域式は

$$u(x,y)=\begin{cases}0, & (x<-a)\\ P(x,y), & (-a\leq x\leq +a)\\ 0, & (x>+a)\end{cases}$$

$$P(x,y)=0.0128\left(\cos\frac{\pi}{a}x+1\right)\times(h^2y^2-2hy^3+y^4),$$

$h=5m$，$a=2m$，

である．表-1は与えた初期速度$v(x,y)$に対して，得られた$t=0$のときの速度を示したものである．

Table 1. Convergence in Fourier Integrals and Eigenfunction Expansions for Initial Velocity, Clamped(y = 0) - Free(y = h)

Abscissa	Specified initial velocity v(x,y)	Computed velocity $\left[\frac{\partial w}{\partial t}\right]_{t=0}$			
		Γ = 4.0, N = 7, s = 0.04	Γ = 2.0, N = 11, s = 0.04	Γ = 5.0, N = 5, s = 0.1	Γ = 4.0, N = 10, s = 0.2
y (m)	(x = 0)				
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.5	0.1296	0.1304	0.1217	0.1314	0.1297
1.0	0.4096	0.4093	0.3846	0.4076	0.4103
1.5	0.7056	0.7072	0.6619	0.7015	0.7065
2.0	0.9216	0.9230	0.8648	0.9200	0.9230
2.5	1.0000	1.0004	0.9380	0.9991	1.0012
3.0	0.9216	0.9243	0.8651	0.9165	0.9228
3.5	0.7056	0.7057	0.6622	0.7000	0.7068
4.0	0.4096	0.4089	0.3845	0.4157	0.4095
4.5	0.1296	0.1374	0.1230	0.1331	0.1326
5.0	0.0	-0.0744	0.0357	-0.1175	-0.0399
x (m)	(y = 2.5 m)				
0.0	1.0000	1.0004	0.9380	0.9991	1.0013
0.5	0.8536	0.8532	0.8284	0.8581	0.8540
1.0	0.5000	0.4958	0.5520	0.5001	0.4963
1.5	0.1465	0.1503	0.2368	0.1461	0.1504
2.0	0.0	-0.0018	0.0089	0.0007	-0.0017
2.5	0.0	-0.0024	-0.0756	0.0003	-0.0024
3.0	0.0	0.0060	-0.0474	0.0009	0.0060
3.5	0.0	-0.0043	0.0164	-0.0015	-0.0043
4.0	0.0	-0.0003	0.0481	0.0015	-0.0003
4.5	0.0	0.0034	0.0296	-0.0013	0.0034
5.0	0.0	-0.0025	-0.0112	0.0007	-0.0025

Note; Γ: Upper limit of mechanical quadrature, N : Number of eigenvalues, s : Step in Simpson's rule.