

徳島大学 正員 中郡 啓彦
 徳島大学 正員 沢田 勉
 徳島大学 学生員 〇武市 康裕

1. まえがき

非線形履歴系が不規則外乱を受けた場合の厳密な応答解析は非常に困難であり、等価線形化法はその近似解法として取得の一方向である。すなわち、非線形系を解析が容易な線形系に置換し、その等価線形系により非線形系の応答を求めるものである。従来の等価線形化法では、復元力特性がその原点に対して対称で、履歴中心は常に原点にあるとしている。本研究では、中立軸の移動を考慮して等価線形化を行い、その点に対して改良を加えた。

2. 中立軸の確率密度関数

中立軸の移動を考慮するため振動中立軸が変曲点を通ると考えて、応答 $X(t)$ の中立軸の確率密度関数を求める。 $X(t)$ の標本関数 $x(t)$ における変曲点は $\dot{x}(t) = 0$ の点であり、変曲点の確率密度は $x(t)$ 、 $\dot{x}(t)$ 、 $\ddot{x}(t)$ の結合確率密度関数から求める。

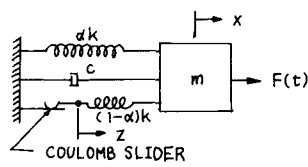


図1 Physical Model

時間間隔 (t_1, t_2) 内で基準値 ξ 以上の $X(t)$ の変曲点の数は次式より求まる。

$$E(\xi, t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \dot{X}(t) \delta[X(t)] \mathbb{I}(X(t) - \xi) dt \quad \text{--- ①}$$

ここで、 $\delta[\cdot]$: Dirac のデルタ関数、 $\mathbb{I}[\cdot]$: Heaviside の階段関数。

単位時間あたりの ξ 以上の変曲点の期待数 $E(M(\xi))$ は次式となる。

$$\begin{aligned} E(M(\xi)) &= -2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} d\dot{x} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, \dot{x}, \ddot{x}) \dot{x} \delta(\dot{x}) \mathbb{I}(x - \xi) d\ddot{x} \\ &= -2 \int_{\xi}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x} p(x, \dot{x}, 0) d\dot{x} \quad \text{--- ②} \end{aligned}$$

ここで、 $p(x, \dot{x}, \ddot{x})$: $X(t)$ 、 $\dot{X}(t)$ 、 $\ddot{X}(t)$ の結合確率密度関数。

単位時間あたりの大きさを考えない変曲点の期待数 $E(M)$ は式2において ξ を $-\infty$ に置き換えることにより求まる。そこで、変曲点の確率密度は次式となる。

$$P_{\xi}(\xi) = \frac{-1}{E(M)} \frac{\partial}{\partial \xi} E(M(\xi)) = \frac{-1}{E(M)} 2 \int_{\xi}^{\infty} \dot{x} p(x, \dot{x}, 0) d\dot{x} \quad \text{--- ③}$$

いま、 $X(t)$ を平均値ゼロの定常カウス過程として、 $p(x, \dot{x}, \ddot{x})$ を決定すると、最終的には、中立軸の確率密度は次式のようになる。

$$P_{\xi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\xi}} \exp\left\{-\frac{\xi^2}{2\sigma_{\xi}^2}\right\} \quad \text{--- ④} \quad \text{ここで、} \sigma_{\xi}^2 = \frac{\sigma_x^2 \sigma_{\dot{x}}^2 - \sigma_{x\dot{x}}^2}{\sigma_{\dot{x}}^2 + \sigma_{\ddot{x}}^2}, \quad \sigma_{\xi}^2 = \frac{\sigma_x^2 \sigma_{\dot{x}}^2 - \sigma_{x\dot{x}}^2}{\sigma_{\dot{x}}^2} = \varepsilon^2 \sigma_x^2$$

ε^2 は不規則指数であり、 $\varepsilon^2 \geq 0$ の場合、狭帯域応答過程となる。したがって、狭帯域応答過程の場合には中立軸の移動の分散は小さくなり、中立軸の移動は微小となる。

また、中立軸を中心とする振動を η とすると、 η は狭帯域応答と考えられ、その確率密度は応答 $x = \xi + \eta$ が平均値ゼロ、分散 σ_{η}^2 のカウス過程であるとする、

$$P_{\eta}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\eta}} \exp\left\{-\frac{\eta^2}{2\sigma_{\eta}^2}\right\} \quad \text{--- ⑤}$$

となる。ここで、 σ_{η}^2 は中立軸を中心とする振動の分散 $\sigma_{\eta}^2 = (1 - \varepsilon^2) \sigma_x^2$ である。

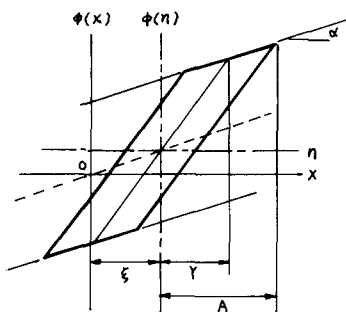


図2 Bilinear Hysteretic Force

3. 中立軸の移動を考慮した等価線形化法

非線形履歴系(図1)の運動方程式は一般に次式で表される。

$$\ddot{x} + 2\beta_0 \omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x(\alpha) = f(t) \quad \text{--- ⑥}$$

ここで、 $\chi(x)$ は図2に示される復元力特性である。非線形履歴系に対応する等価線形系の運動方程式は次のようである。

$$\ddot{x} + 2\beta\omega_0\omega_{eq}\dot{x} + \omega_{eq}^2 x = f(t) \quad \text{--- (7)}$$

$$\text{消散エネルギー率の一致より} \quad \beta\omega_0\omega_{eq} = \beta_0\omega_0 + \frac{1}{2}\omega_0^2 E[\chi(x)\dot{x}] / E[\dot{x}^2] \quad \text{--- (8)}$$

$$\text{運動エネルギーの一致より} \quad (\omega_{eq}/\omega_0)^2 = E[\chi(x)x] / E[x^2] \quad \text{--- (9)}$$

ここで、応答 x は中立軸の移動量と中立軸を中心とする振動 η により $x = \xi + \eta$ と表される。もとめは必ずしも独立であるとは限らないが、簡単のために独立であるとすると、bi-linear系の場合には、式8と9はそれぞれ次式のようになる。

$$\beta_{eq} = \beta_0 \frac{\omega_0}{\omega_{eq}} + \frac{1}{2} \frac{\omega_0^2}{\omega_{eq}^2} \frac{1-\varepsilon^2}{E[\eta^2]} E[\eta\chi(\eta)] \quad \text{--- (10)}, \quad (\omega_{eq}/\omega_0)^2 = \alpha\varepsilon^2 + \frac{1-\varepsilon^2}{E[\eta^2]} E[\eta\chi(\eta)] \quad \text{--- (11)}$$

ここで、 $E[\eta\chi(\eta)]$ を求める場合、履歴エネルギー消散サイクルとして、降伏後の固有振動数 ω_0 を採用の方が良い結果を得ることが判明しているの、これを用いると、 $E[\eta\chi(\eta)]$ は次式となる。

$$E[\eta\chi(\eta)] = -\frac{1}{2}\omega_{eq}\sqrt{\alpha}\left(\frac{\omega_0}{\omega_{eq}}\right) \int_0^\infty AS(A)P(A)dA \quad \text{--- (12)} \quad \text{ここで} \quad S(A) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \chi(\eta) \sin \psi d\psi$$

つぎに、 $E[\eta\chi(\eta)]$ は次式のようになる。

$$E[\eta\chi(\eta)] = \frac{1}{2} \int_0^\infty AC(A)P(A)dA \quad \text{--- (13)} \quad \text{ここで} \quad C(A) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \chi(\eta) \cos \psi d\psi$$

なお、 $P(A)$ は中立軸を中心とする振動の極値分布である。式12と13より、式10と11はそれぞれ次式となる。

$$\beta_{eq} = \beta_0 \frac{\omega_0}{\omega_{eq}} - \frac{1-\varepsilon^2}{4\alpha\eta^2} \sqrt{\alpha}\left(\frac{\omega_0}{\omega_{eq}}\right)^3 \int_0^\infty AS(A)P(A)dA \quad \text{--- (14)}, \quad (\omega_{eq}/\omega_0)^2 = \alpha\varepsilon^2 + \frac{1-\varepsilon^2}{2\alpha\eta^2} \int_0^\infty AC(A)P(A)dA \quad \text{--- (15)}$$

式14および15は中立軸の移動を考慮した端部の等価線形化規範である。

4. 解析結果

定常状態においては、履歴中心まわりの振動は狭帯域応答と考えられ、その振幅の確率分布はレイリー分布となる。したがって、式14および15の $P(A)$ にレイリー分布を採用して、定常応答を求め、その結果を $\alpha=1/2$ (図3)と $\alpha=1/21$ (図4)について示した。図中、

$N = \sqrt{250}\omega_0/\omega_0^2$ であり、実線は中立軸の移動を考慮した場合、破線は考慮しない場合⁽¹⁾の解析結果である。また、○印は $\beta=0.01$ 、△印は $\beta=0.05$ で、外乱として有帯域ホワイトノイズを採ったときのシミュレーション値である。

5. 考察

以上のように、等価線形化法に中立軸の移動が導入でき、従来の方法よりも塑性変形を評価できたと思われる。しかし、シミュレーション値と比較すると、その精度はあまり良くなっていない。これは応答が広帯域化することが第一の原因と考えられ、また中立軸の移動を式のうへでは導入できたが、これが実際に妥当なものか検証する必要があり、今後改良の余地が残されている。

参考文献：(1)竹宮，不規則外力を受ける双次履歴系の等価線形化について，土木学会論文報告集，第219号，1973年7月

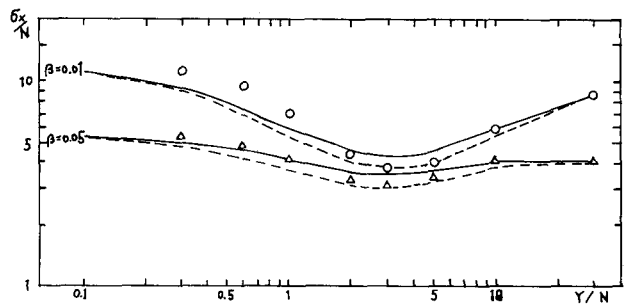


図3 定常rms変位 $\alpha = 1/2$

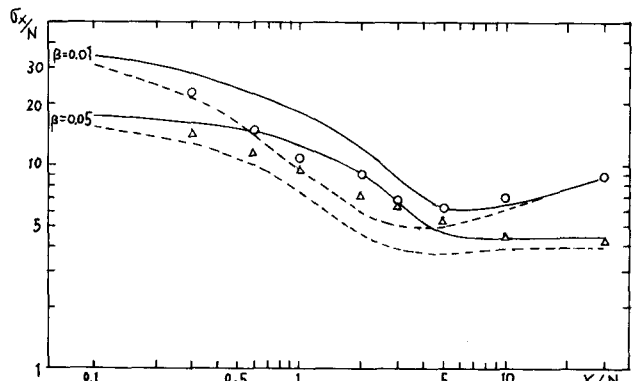


図4 定常rms変位 $\alpha = 1/21$