

熊本大学 正員 平井一男
八代高専 正員 水田洋司

1. 予えがき. 振動系に剛性あるいは質量の線形関係で表現できない減衰が存在すると各モード間に連成が起り、運動方程式を1自由度系に分解することは理論的に不可能となる。しかし、多くの構造解析においては、減衰が小さいため、モード間の連成を無視して各モードについて独立に解いている。下部構造と一体になったラーメン橋、高架橋等のように減衰が大きい場合には、モード間の連成を考慮して解く必要がある。モード間の連成を考慮して厳密に解く方法もあるが、本研究は、モード間の連成を無視して求めた応答に、連成項に等価な外力(=付加外力)による応答の補正を行って、連成を考慮した応答を求めようとするものである。提案法は、多自由度系を1自由度系に分解し、step-by-stepに応答を求めるため、各時間点において付加外力を求める必要がある。時間間隔内では付加外力は一定と仮定しているため、付加外力に対応する応答は近似解となる。理論の展開は、Newmarkのβ法を用いているが、他の逐次積分法を用いてもよい。

2. 解析手法. 強制外力 $P(t)$ の作用する多質点系の運動方程式は

$$M\ddot{W} + C\dot{W} + KW = P(t) \quad (1)$$

ここに、 M, C, K はマトリックスであり、それぞれ質量、減衰、剛性をあらわす。 $\ddot{W}, \dot{W}, W, P(t)$ はベクトルであり、それぞれ加速度、速度、変形、外力をあらわす。(1)式にモーダル・アナリシスを適用し整理すると次のようになる。

$$W = \Phi \xi(t) = [\phi_1 \phi_2 \cdots \phi_n] [\xi_1(t) \xi_2(t) \cdots \xi_n(t)]^T \quad (2)$$

$$\ddot{\xi}_i(t) + 2\zeta_i \omega_i \dot{\xi}_i(t) + \omega_i^2 \xi_i(t) = \bar{F}_i(t) \quad (3)$$

$$\omega_i^2 = \text{diag}(\omega_i^2) \quad (4)$$

$$\bar{F}_i(t) = \Phi^T P(t) \quad (5)$$

ここに、 ϕ_i は i 次の正規化モード、 $\xi_i(t)$ は i 次モード成分の時間変化、 ω_i は i 次の固有振動数をあらわす。(3)式は連続した任意時間 t において成立つ式であるから、step-by-step に応答を求める場合の任意時間点 r においても成立する。

$$\ddot{\xi}_r + 2\zeta_i \omega_i \dot{\xi}_r + \omega_i^2 \xi_r = \bar{F}_r \quad (6)$$

(6)式において、 $C = aM + bK$ という関係が成立しない場合には、 $\Phi^T C \Phi$ は非対角要素にも零でない値をもつため、 $(\xi_r)_i$ について独立に解くことができない。本研究では、モード間の連成項のみを等価な外力で置換する方法を提案する。従って、(6)式は

$$\ddot{\xi}_r + 2\zeta_i \omega_i \dot{\xi}_r + \omega_i^2 \xi_r = \bar{F}_r + \Delta \bar{F}_r \quad (7)$$

$$\Delta \bar{F}_r = (\Phi^T C \Phi - 2\zeta_i \omega_i) \dot{\xi}_r \quad (8)$$

$$\zeta_i \omega_i = \text{diag}(\zeta_i \omega_i) \quad (9)$$

となる。ここに、 $\zeta_i \omega_i$ は i 次モードの減衰定数、 $2\zeta_i \omega_i$ は $\Phi^T C \Phi$ の対角要素からなるマトリックスで非対角要素は零である。(7)式で、 $\Delta \bar{F}_r$ が既知であれば(7)式は $(\xi_r)_i$ について独立となり、簡単に解くことができる。まず(7)式中の $\Delta \bar{F}_r$ を既知の値として速度応答を求め、(8)式の関係より $\Delta \bar{F}_r$ を定め、(7)式を解いて変形、速度、加速度を得ることができる。時間間隔を Δt とし、 r

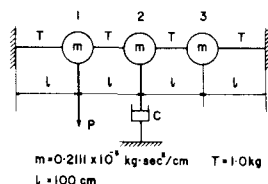


図1 3質点モデル

表1 固有振動数 (rad/sec)

次数	固有振動数
1	5.2678
2	9.7335
3	12.7175

表2 正規化モード

次数	質点	1	2	3
1	1	0.0291	$\frac{\sqrt{2}}{0.0291}$	0.0291
2	1	0.0205	0	-1
3	1	0.0291	$\frac{\sqrt{2}}{0.0291}$	0.0291

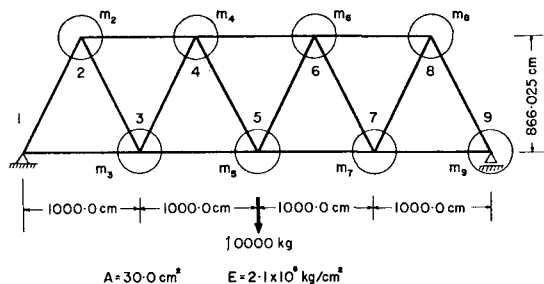


図2 トラス橋

時点での応答を Newmark の β 法により求める。Newmark の β 法は次式で表わせる。

$$\ddot{\delta}_r = \ddot{\delta}_{r-1} + \frac{h}{2} (\ddot{\delta}_{r-1} + \ddot{\delta}_r) \quad (10)$$

$$\delta_r = \delta_{r-1} + h \dot{\delta}_{r-1} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) h^2 \ddot{\delta}_{r-1} + \beta h^2 \ddot{\delta}_r \quad (11)$$

(7), (8), (10), (11) 式の関係より r 時点での付加外力 ΔF_r は次式で定めることができる。

$$\Delta F_r = - \left\{ \mathbb{I} + \frac{h}{2} \Delta C (\mathbb{I} + h \Delta W + \beta h^2 W^2) \right\}^{-1} \Delta C \left[\ddot{\delta}_{r-1} + \frac{h}{2} \ddot{\delta}_{r-1} + \frac{h}{2} (\mathbb{I} + h \Delta W + \beta h^2 W^2)^{-1} \{ F_r - 2 \Delta W (\ddot{\delta}_{r-1} + \frac{h}{2} \ddot{\delta}_{r-1} - W^2 (\delta_{r-1} + h \dot{\delta}_{r-1} + (\frac{1}{2} - \beta) h^2 \ddot{\delta}_{r-1})) \} \right] \quad (12)$$

$$\text{ここに、} \Delta C = \Phi^T C \Phi - 2 \Delta W \quad (13)$$

但し、 $(\mathbb{I} + h \Delta W + \beta h^2 W^2)$ は対角マトリックスのため、この逆マトリックスは対角要素の逆数により求めることができる。また、 $\frac{h}{2} \Delta C (\mathbb{I} + h \Delta W + \beta h^2 W^2)^{-1}$ の各要素は 1 より小さいと考えられ、 $\{ \mathbb{I} + \frac{h}{2} \Delta C (\mathbb{I} + h \Delta W + \beta h^2 W^2)^{-1} \}$ の逆マトリックスは級数展開によっても求めることができる。計算手順は下記になる。



表 4 トラス橋の固有振動数 (Hz)

i*	natural frequency	i*	natural frequency
1	4.0845	9	38.6019
2	7.3677	10	40.2022
3	11.8158	11	40.6607
4	17.8044	12	50.2318
5	20.5438	13	51.5795
6	26.0760	14	55.5810
7	28.5023	15	61.0464
8	31.1981		

* order of natural frequency

3. 数値計算 理論の妥当性を確かめるために、3 質点モデル (図-1)、トラス橋 (図-2) を例にとり、外力、減衰定数、時間間隔をかねて数値計算を試みた。Newmark の $\beta=1/4$ 法の他に筆者らの提案した逐次積分法⁽³⁾を用いた場合についても計算し、変位応答について比較している。外力は一定外力と正弦波外力の 2 種類を用いているが、正弦波外力の振動数は共振に近い状態にするためモーダルアナリシスによる減衰を考慮した場合の系の 1 次固有振動数を用いて

いる。表-1, 2 には 3 質点モデルの質量と固有振動数を記しており、表-3, 4 にはトラス橋の質量と固有振動数を記している。図-3 には、正弦波外力による 3 質点モデルの質点 1 の変位応答を示してある。連成項無視の影響は、 $\zeta_1=0.01$ では振幅誤差が少しであるが、 $\zeta_1=0.3$ (図-3) では振幅誤差の他に位相誤差という形であらわれている。しかし、図-3 からわかるように、提案法は厳密解 (Newmark の $\beta=1/4$ 法、 $h=T_{min}/50$) とよく一致している。図-2 のトラス橋の計算結果は講演時に発表予定である。

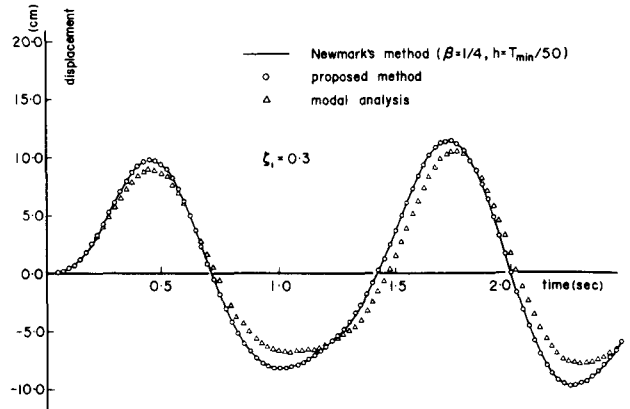


図-3 正弦波外力による質点 1 の変位応答 ($P=0.1 \times \sin(5.0252t)$ kg, $\zeta_1=0.3$)

4. 結び 今後の問題として、外力近似が

十分に行なえるような時間間隔で時間間隔を大にとった時に付加外力の値が発散せず安定で正確な値を与えるかどうかということが考えられるが、これは付加外力が時間間隔内では一定という条件を満足する大きさの時間間隔に左右されるであろう。これは構造物、外力によって異なり、一意的に定めることは難しいようである。以上の事より、提案法は近似的ではあるが、減衰によるモード間の連成を加味した値を得ることができ、減衰が大きい場合にモーダル・アナリシスを補正する一方法として利用できるであろう。

(参考文献)

- (1) Hurty, W.C.: Dynamic Analysis of Structural Systems by Component Mode Synthesis, AIAA Journal, 3, 1965.
- (2) 河島 仿雄: 動的応答解析, コンピュータによる構造工学講座, II-4-A, 培風館, pp. 33~80, 1972.
- (3) 水田, 西山, 平井: Newmark の β 法における位相遅れ補正の一方法, 土木学会論文報告集, 第 268 号, pp. 15~21.

1977 年 12 月