

熊本大学工学部 正員 ○ 秋吉 卓
 熊本大学工学部 学生員 中山 移
 八代高専 正員 別田 邦彦

1. まえがき 地震時の地盤と構造物の問題を扱うとき、地盤の揺れを考慮せざるを得ないが、通常はその地盤を離散化したモデルにして、適当な領域内の地盤を系として取り上げる。このとき、適当に設定した境界面が系内に伝播する波動に対して抵抗なく通過せしめることが必要であるが、その手法に関してはずいぶん提案されている。^{1)~6)} それらは *standard viscous boundary*, *transmitting boundary* あるいは *consistent boundary* などと呼ばれているが、大別すると各時刻ごとに直接積分によって解く方法と、入出力の関係を Fourier 変換形に対応づけておいて、これを数値的に逆変換して応答を求める手法とになる。線形の問題ならば後者の方が有利であるが、非線形な問題あるいは初期値問題では前者の方が有利であり、ここに示す手法は前者に属するものである。

2. 解析手法 FIG.1 のような平面モデルが硬い基盤上に載っており、振動源がその系内にある場合を考える。振動源が取り扱う系の左右の境界 B_L , B_R で反射することなく外側へ伝播せしめる境界(条件)を求めることになる。ここでは SH 波のみを考えているので、水平変位 $\psi(x)$ は紙面直角 (y 軸) 方向に生ずるものとする。

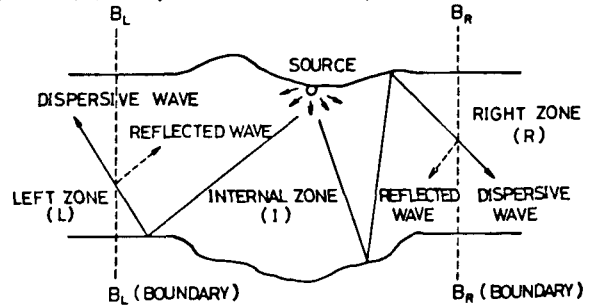


FIG.1 WAVE PROPAGATION IN PLANE INFINITE STRUCTURES

FIG.2 の B_R 上の変位 $\{\psi(x)\}_k$ は次式を満たす。

$$[m]\{\ddot{\psi}\}_k + [k]_1(\{\psi\}_k - \{\psi\}_{k-1}) + [k]_2\{\psi\}_k + [k]_1(\{\psi\}_k - \{\psi\}_{k+1}) = \{0\} \quad \dots (1)$$

ただし、初期条件は

$$\{\psi(0)\}_k = \{\dot{\psi}(0)\}_k = 0, \quad (k=1, 2, 3, \dots) \quad \dots (2)$$

このとき、次の置き換えをしている。

$$\left. \begin{aligned} [k]_1 &= k_1 [I], [k]_2 = k_2 [E], [E] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \\ k_1 &= Gt_0b/a, k_2 = Gt_0a/b, t_0: \text{要素厚} \end{aligned} \right\} \quad \dots (3)$$

ここで、固有値 $[\lambda]$ 、モードマトリクス $[Q]$ は次式

$$\left(\frac{1}{m} [k]_2 - \lambda^2 [I] \right) \{Q\} = \{0\} \quad \dots (4)$$

を満足するようにし、かつ $[Q]^T [Q] = [I]$ と正規化しておく。

そこで (2) のもとで (1) の両辺を Laplace 変換すると

$$(2[k]_1 + [k]_2 + [m]s^2) \{\bar{\psi}\}_k - [k]_1 \{\bar{\psi}\}_{k-1} - [k]_1 \{\bar{\psi}\}_{k+1} = \{0\} \quad \dots (5)$$

変換形 $\{\bar{\psi}(s)\}_k$ は $[Q]$ で展開すると (展開係数を $\{A(s)\}$ とする)

$$\{\bar{\psi}(s)\}_k = [Q] \{A(s)\} \quad \text{あるいは} \quad \{A(s)\} = [Q]^T \{\bar{\psi}(s)\}_k \quad \dots (6)$$

一方、mode n との伝達関数を $G_1(s), \dots, G_n(s)$ とすると、 $\{\bar{\psi}(s)\}_{k+1}$ は

$$\begin{aligned} \{\bar{\psi}(s)\}_{k+1} &= G_1(s) \cdot A_1 \{A\}_1 + \dots + G_n(s) \cdot A_n \{A\}_n \\ &= [Q] [G(s)] \{A(s)\} = [Q] [G(s)] [Q]^T \{\bar{\psi}(s)\}_k \quad \dots (7) \end{aligned}$$

同様に、 $\{\bar{\psi}(s)\}_{k-1} = [Q] [G^{-1}] [Q]^T \{\bar{\psi}(s)\}_k = [Q] [G^{-1}] [Q]^T \{\bar{\psi}(s)\}_k \quad \dots (8)$

そこで (7), (8) を (5) に代入すると、 $\{\bar{\psi}(s)\}_k$ に関する次の方程式をうる。

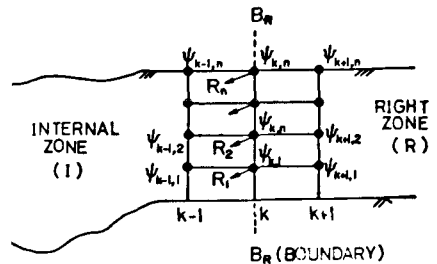


FIG.2 BOUNDARY

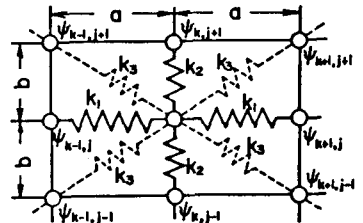


FIG.3 LUMPED MASS MODEL FOR LAYERED SYSTEM

$$\begin{bmatrix} 2k_1 + ms^2 - k_1(q_1 + 1/q_1) + m\lambda_1^2 \\ 2k_1 + ms^2 - k_1(q_n + 1/q_n) + m\lambda_n^2 \end{bmatrix} \{\bar{\psi}(s)\} = \{0\} \quad \text{----- (9)}$$

この (9) から $\{\bar{\psi}\}_R$ について有意な解を持つためには、左辺の係数行列式が 0 になければならない。これより

$$G_\ell^2(s) - (s^2 + 2P_\ell^2 + \lambda_\ell^2) G_\ell(s) + 1 = 0, \quad (\ell = 1, 2, \dots, n) \quad \text{----- (10)}$$

$$\text{すなわち, } G_\ell(s) = (\sqrt{s^2 + 4P_\ell^2 + \lambda_\ell^2} - \sqrt{s^2 + \lambda_\ell^2}) / 4P_\ell^2, \quad (\ell = 1, 2, \dots, n) \quad \text{----- (10)'}$$

$$T = L, \quad P_1 = \sqrt{k_1/m}, \quad P_2 = \sqrt{k_2/m}$$

いま FIG. 2 の k 列目の格点の直ぐ右側に仮想の境界 B_R が入る場合は、元の半無限地盤にもとづいて B_R に加えるべき Boundary force $\{T(t)\}$ は次のように求められる。すなわち (7) より

$$-\{\bar{T}(s)\} = [k]_1 \{\bar{\psi}\}_R - \{\bar{\psi}\}_{R+1} = \frac{1}{2} m [Q] \begin{bmatrix} \sqrt{s^2 + \lambda_1^2} (\sqrt{s^2 + \lambda_1^2 + 4P_1^2} - \sqrt{s^2 + \lambda_1^2}) \\ \sqrt{s^2 + \lambda_n^2} (\sqrt{s^2 + \lambda_n^2 + 4P_n^2} - \sqrt{s^2 + \lambda_n^2}) \end{bmatrix} [Q]^T \{\bar{\psi}\}_R \quad \text{----- (11)}$$

これを逆変換すると

$$-\{T(t)\} = \sqrt{m k_1} \int_0^t \frac{J_1(2P_1\tau)}{\tau} \{\dot{\psi}(t-\tau)\}_R d\tau + 2k_1 [Q] \int_0^t \left[\begin{array}{l} \lambda_1 \int_0^{\tau} \frac{J_2(2P_1\sqrt{\tau^2 - u^2})}{\sqrt{\tau^2 - u^2}} J_1(\lambda_1 u) du \\ \lambda_n \int_0^{\tau} \frac{J_2(2P_n\sqrt{\tau^2 - u^2})}{\sqrt{\tau^2 - u^2}} J_1(\lambda_n u) du \end{array} \right] [Q]^T \{\psi(t-\tau)\}_R d\tau \quad \text{----- (12)}$$

一方、連続体理論より導かれる Lysmer ら¹⁾ の手法によると ($T = L$, $J_1(\cdot)$, $J_2(\cdot)$: 第 1 種 Bessel 関数)

$$-\{T(t)\} = \sqrt{m k_1} \{\dot{\psi}(t)\}_R + \sqrt{m k_1} [Q] \int_0^t \left[\begin{array}{l} \lambda_1 J_1(\lambda_1 \tau) / \tau \\ \lambda_n J_1(\lambda_n \tau) / \tau \end{array} \right] [Q]^T \{\psi(t-\tau)\}_R d\tau \quad \text{----- (13)}$$

かくして、FIG. 1 の B_L , B_R で囲まれた内部の運動方程式は次式となる。

$$[M]_E \{\ddot{\psi}\}_E + [k]_E \{\psi\}_E = \{F(t)\}_E + \{T(t)\}_L + \{T(t)\}_R \quad \text{----- (14)}$$

ここに、 $[M]_E$, $[k]_E$, $\{F(t)\}_E$ は各々、系全体の質量マトリクス、剛性マトリクス、外カベクトルであり、 $\{T(t)\}_L$, $\{T(t)\}_R$ は左右の Boundary force である。なお (12) の表示は (13) をとう一重積分した形になっている。

3. 数値計算

FIG. 4 のような等分割モデルの節点 4~15 に、0~30 rad/sec のホワイトノイズ(加速度外力;

FIG. 5 参照)を作用させた場合を考える。このとき載荷状態より、例えば

節点 6 と 15 は互に対称点であるから、もし Boundary force が完全であれば両節点の波形は同一となるはずである。

FIG. 6 の加速度応答波形をみると、Lysmer らの手法では波形のく

違いが著しいが、提案した手法ではほぼ完全に一致しており、妥当性を示しているといえよう。なおこの場

合の諸元は、 $V_s = 50 \text{ m/sec}$, 表層厚は 15 m , $\Delta t = 0.02 \text{ sec}$ 。その他の

結果は講演時にのべる。

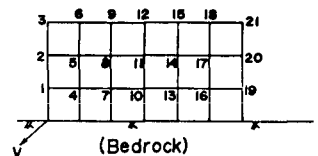


FIG. 4 UNIFORM-MESH MODEL

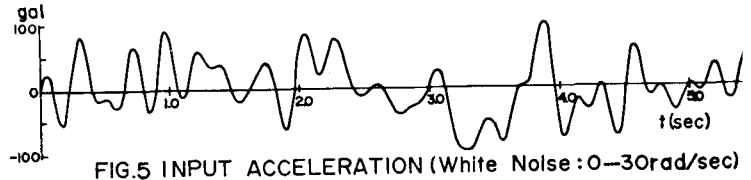
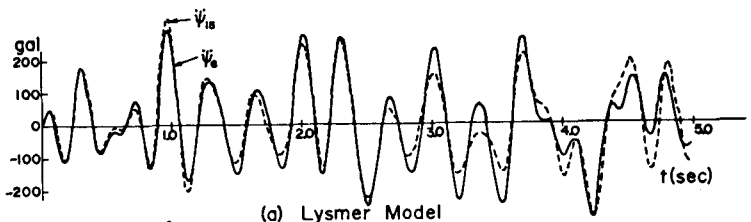
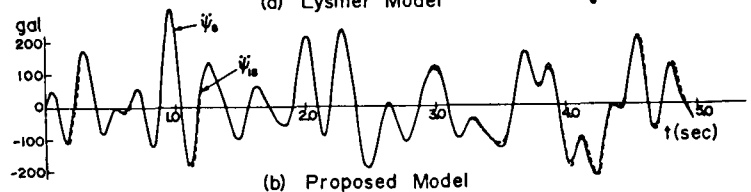


FIG. 5 INPUT ACCELERATION (White Noise: 0-30 rad/sec)



(a) Lysmer Model



(b) Proposed Model

FIG. 6 RESPONSE ACCELERATIONS

参考文献 1) Lysmer, J. et al, Joul. of EM Div, ASCE, Vol. 95, No. EM4, Aug., 1969, pp. 857-877, 2) Lysmer, J., Bull. of SSA, Vol. 60, No. 1, Feb., 1970, pp. 89-104, 3) Lysmer, J. et al, Joul. of EM Div, ASCE, Vol. 98, No. EM1, Feb., 1972, pp. 85-105, 4) 田治見 宏・下村 幸男, 日本建築学会論文報告集, 第243号, 1976.5, pp. 41-51, 5) Kausel, E et al, Joul. of EM Div, ASCE, Vol. 103, No. EM4, Aug., 1977, pp. 569-588, 6) White, W. et al, Joul. of EM Div, ASCE, Vol. 103, No. EM5, Oct., 1977, pp. 949-964.