

室蘭工業大学 正員 松岡健一
北海道大学 正員 能田徳雄

1. まえがき 弾性媒体中にあり、液体で満たされている厚肉円筒を伝わる弾性波の特性を明らかにすることは地中に埋設された燃料輸送用のパイプライン等の動的な挙動を検討するための基礎的な資料と与える。筆者らはこれまでこの問題に対して、特に位相速度について詳細に検討してきたが、本論では種々の波長の弾性波が伝播するときの、円筒及び弾性体の変位・応力の波動伝播モードを、円筒と弾性体の弾性定数比、円筒の肉厚、液体と円筒の密度比等を変化させて求め、その結果を検討する。

2. 波動伝播の基礎方程式 弾性体及び円筒の基礎方程式は、半径方向に r 、接線方向に θ 、円筒軸方向に z 軸をとった円柱座標の運動方程式から、対象とする波動を調和波動と仮定し、有限ハンケル変換を適用することにより次のように求められる。各座標軸方向の変位をそれぞれ u, v, w とすれば、

$$u = (\tilde{A}_{mr} + \tilde{B}_{mr}) \cos m\theta e^{i\phi(t-z/v)} \quad (1), \quad v = (\tilde{A}_{mr} - \tilde{B}_{mr}) \sin m\theta e^{i\phi(t-z/v)} \quad (2),$$

$$\tilde{A}_{mr} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\chi_{mp}^{(k)}(N_u r) \left\{ \alpha_{mk}/zu + (m+1)A_{mk} + (m-1)B_{mk} - iNE_{mk}/z \right\} / N_u + (UN^2/\rho p^2) \left\{ \chi_{mp}^{(k)}(N_u r) / N_u - N_u \chi_{mp}^{(k)}(N_u r) / N^2 \right\} \left\{ \beta_{mk}/zu + (m+1)A_{mk} - (m-1)B_{mk} - iNE_{mk} \right\} \right] \quad (3),$$

$$\tilde{B}_{mr} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\chi_{ms}^{(k)}(N_u r) \left\{ \alpha_{mk}/zu + (m+1)A_{mk} + (m-1)B_{mk} + iNE_{mk}/z \right\} / N_u + (UN^2/\rho p^2) \left\{ \chi_{ms}^{(k)}(N_u r) / N_u - N_u \chi_{ms}^{(k)}(N_u r) / N^2 \right\} \left\{ \beta_{mk}/zu + (m+1)A_{mk} - (m-1)B_{mk} - iNE_{mk} \right\} \right] \quad (4),$$

$$w = \tilde{w}_{mr} \cos m\theta e^{i\phi(t-z/v)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[G_m^{(k)}(N_u r) E_{mk} + (zu/N/\rho p^2) \left\{ G_m^{(k)}(N_u r) - G_m^{(k)}(N_u r) \right\} \left\{ \beta_{mk}/zu + (m+1)A_{mk} - (m-1)B_{mk} - iNE_{mk} \right\} \right] \cos m\theta e^{i\phi(t-z/v)} \quad (5),$$

上式中 u, λ は Lamé の定数, $N = p/v = 2\pi/L = \pi/\ell$, p : 角速度, v : 波動の z 方向の伝播速度, L : 波長, ℓ : 半波長, ρ : 密度, $m = 0, 1, \dots$ で円筒方向の波動の形を示す。また式中の関数は、円筒の場合、円筒の外径を a_1 、内径を a_2 , $a_1 = a_2$ として

$$G_m^{(k)}(Nr) = R_{mm}^{(k)}(Nr)/R_{mm}^{(k)}(Na_k), \quad \chi_{mp}^{(k)}(Nr) = R_{m+1,m}^{(k)}(Nr)/R_{m+1,m}^{(k)}(Na_k), \quad \chi_{ms}^{(k)}(Nr) = R_{m-1,m}^{(k)}(Nr)/R_{m-1,m}^{(k)}(Na_k),$$

$$R_{j,m}^{(k)}(Nr) = I_j(Nr)K_m(Na_{k-1}) - (-1)^{j+m}I_m(Na_{k-1})K_j(Nr), \quad N_u^2 = N^2 - \rho p^2/\mu, \quad N_s^2 = N^2 - \rho p^2/(zu + \lambda),$$

I, K は第 1 種及び第 2 種の変形 Bessel 関数であり、 $\alpha_{mk}, \beta_{mk}, A_{mk}, B_{mk}, E_{mk}$ は $r = a_1$ 及び a_2 における応力変位と与えられる係数である。円孔を有する弾性体に対しては、上式で $a_1 \rightarrow \infty$ とすることにより与えられる。

圧縮性液体の基礎方程式は、円柱座標で表わされる圧縮性液体の波動方程式から、有限ハンケル変換を用いて半径方向変位 u_f 及び圧力 p_f は、次のようになる。

$$u_f = \{ N_f \chi_{mp}^+(N_f r) + m G_m^+(N_f r)/r \} a_2 \cos m\theta e^{i\phi(t-z/v)} \quad (6), \quad p_f = \rho_f p^2 G_m^+(N_f r) a_2 \cos m\theta e^{i\phi(t-z/v)} \quad (7),$$

ただし、 $N_f^2 = N^2(1 - \gamma^2)$, $\gamma = p/NC_f = v/C_f$, $C_f^2 = K/\rho_f$, K : 液体の体積弾性率、また式中の関数は

$$G_m^+(N_f r) = I_m(N_f r)/I_m(N_f a), \quad \chi_{mp}^+(N_f r) = I_{m+1}(N_f r)/I_m(N_f a), \quad \gamma < 1 \quad a: \text{円孔の半径}$$

$$G_m^+(N_f r) = J_m(N_f r)/J_m(N_f a), \quad \chi_{mp}^+(N_f r) = J'_{m+1}(N_f r)/J_m(N_f a), \quad \gamma > 1 \quad J: \text{第 1 種 Bessel 関数}$$

3. 境界条件 図-1 の様に、無限弾性媒体、弾性円筒、液体が存在しているものとする。弾性媒体を添字 1、円筒を添字 2、液体を添字 f で表わすものとする。

1) $r = a_1$ における条件: この場合まず式(3), (4)から

$$\tilde{A}_{mr1}r = a_1 = a_1 A_{mz-1}, \quad \tilde{B}_{mr1}r = a_1 = a_1 B_{mz-1}, \quad \tilde{A}_{mr2}r = a_1 = a_1 A_{m1-2}, \quad \tilde{B}_{mr2}r = a_1 = a_1 B_{m1-2} \quad (8)$$

を満足しなければならない。その他の条件は接触面の状態によって異なる。即ち接触面の変位が連続の場合と、接触面にせん断応力が存在しない場合とに分けられ

i) 接触面の変位が連続の場合 このとき接触面の変位および接触面に作用する応

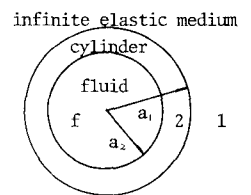


図-1

力は連続であるとして

$$u_1(r=a_1) = u_2(r=a_1),$$

$$v_1(r=a_1) = v_2(r=a_1),$$

$$w_1(r=a_1) = w_2(r=a_1),$$

$$\therefore A_{m2,1} = A_{m1,2}$$

$$B_{m2,1} = B_{m1,2} \quad (9)$$

$$E_{m2,1} = E_{m1,2}$$

$$\sigma_{r1}(r=a_1) = \sigma_{r2}(r=a_1)$$

$$\tau_{\theta r1}(r=a_1) = \tau_{\theta r2}(r=a_1)$$

$$\therefore \beta_{m2,1} = \beta_{m1,2}$$

$$\alpha_{m2,1} = \alpha_{m1,2} \quad (10)$$

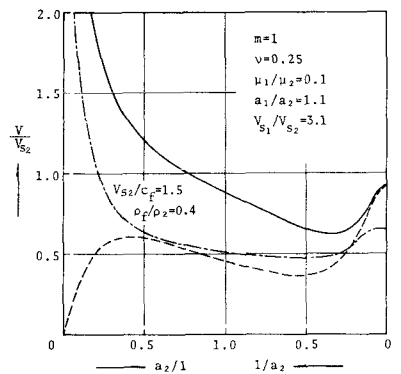
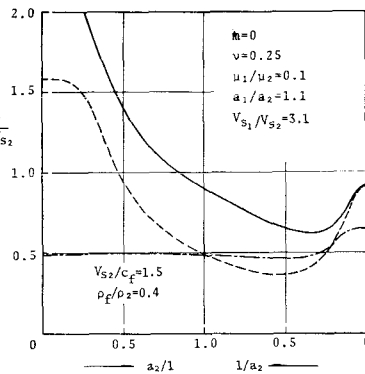


図-2

ii) 接触面にせん断応力が存在しない場合 このとき半径方向変位および応力は連続するものとする。

$$u_1(r=a_1) = u_2(r=a_1), \therefore A_{m2,1} + B_{m2,1} = A_{m1,2} + B_{m1,2} \quad (12), \quad \sigma_{r1}(r=a_1) = \sigma_{r2}(r=a_1), \therefore \beta_{m2,1} = \beta_{m1,2} \quad (13),$$

$$\tau_{\theta r1}(r=a_1) = \tau_{\theta r2}(r=a_1) = 0, \therefore \alpha_{m2,1} = \alpha_{m1,2} = 0 \quad (14), \quad \tau_{r\theta1}(r=a_1) = \tau_{r\theta2}(r=a_1) = 0 \quad (15)$$

2) $r=a_2$ における条件: ここでは弾性円筒と液体が接触している。まず円筒に対しては(1)と同様、式(3)

$$(4) \text{ から } \tilde{A}_{mr2}(r=a_2) = a_2 A_{m2,2}, \quad \tilde{B}_{mr2}(r=a_2) = a_2 B_{m2,2} \quad (16)$$

$$\text{また液体にはせん断応力が存在しないので, } \tau_{\theta r2}(r=a_2) = 0 \therefore \alpha_{m2,2} = 0 \quad (17) \quad \tau_{r\theta2}(r=a_2) = 0 \quad (18)$$

さらに弾性円筒と液体との半径方向変位および応力は等しくなければならぬので

$$u_2(r=a_2) = u_4(r=a_2), \therefore A_{m2,2} + B_{m2,2} = (N_4 \chi_{mp} \phi_4 a_2) + m/a_2 \phi_4 / a_2 \quad (19), \quad \sigma_{r2}(r=a_2) = -p_4^* \phi_4 \quad (20)$$

以上の条件式より各波長に対する固有値を求め、このときの変位および応力の波動モードを求める。

4. 数値解析 数値計算例として、ポアソン比0.25, $u_1/u_2=0.1$, $a_1/a_2=1.1$, $V_{S1}^*/V_{S2}^*=10.0$, $\rho_F/\rho_2=0.4$

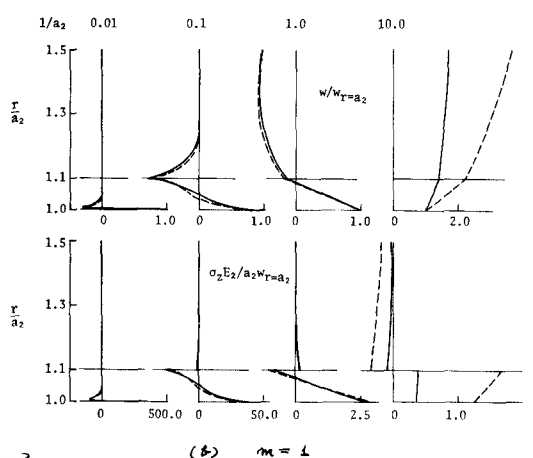
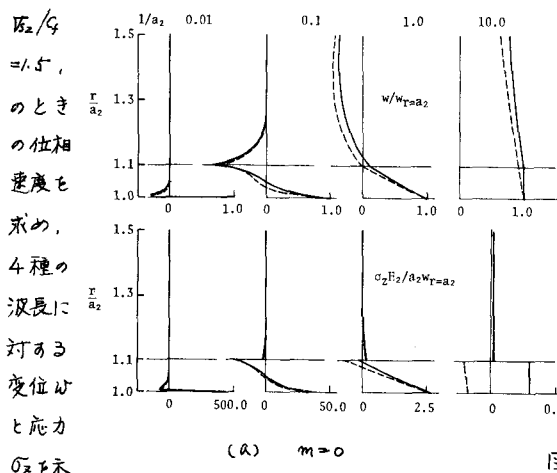


図-3

した。図-2には円筒のみ(実線)、液体で満たされた場合(一実線)、液体を含まない場合(実線)の位相速度分散曲線を示した。図-3はこのときの波長 $\lambda/a_2=0.01, 0.1, 1.0, 10.0$ のときの波動モードを示した。円筒

内が空の場合(実線)と液体で満たされた場合(一実線)を示したが、 w , σ_r とも波長の長いところでは液体の影響を大きく受けることがわかる。波長の短いところではいずれも円筒の内側に変位および応力が集中しており、表面波の様相を呈している。軸対称波動($m=0$)と曲げ波動($m=1$)と比較すると、波長が短いときはほとんど差

がないが波長が長くなるに従い、その特徴が明らかとなっている。

*参考文献: 1) Bloch, H. A.; J. Appl. Phys., Vol. 23, p. 997, 1952 2) 松岡 龍町; 第27回応力連合講演要録, p. 295, 1977