I-233　無限領域における波動伝播解析のための一数値解析法

山口大学　正員　中川浩二
徳山高専　正員　工藤洋三

1. はじめに

地震，発破，機械振動，交通振動などにともなう地盤振動の問題は近年特に大きくとり上げられてきている。地盤を対象とした力学的な解析を行うとき，地盤は一般に半無限体として扱われており，そのため地盤の動的問題の解として解析解を得ることができれば無限領域を表わす上で望ましいことはいうまでもない。しかし，地盤と構造物との相互作用を扱うとき，構造物の存在により解析解を得ることは事実上不可能となり，有限要素法，差分法などの数値解析法を用いることが必要となる。

これらの数値解析法においては対象となる半無限領域を有限個の要素あるいは差で近似するため，近似によって設けられた遠方境界での波の反射によって大きな誤差を生み出すことがある。この遠方境界での波の反射をなくし，無限領域を近似するための方法として，境界にダッシュポットを設け，波のエネルギーを吸収するLysmerらの方法がよく用いられているようである。

本研究は連続という状態が自由境界と固定境界との中間状態にあるという発想をもとに，自由境界および固定境界両者の状態，さらにはこれら2種類の混合境界による状態を重ね合わせ，境界により反射される波の影響を除去しようと試みたものである。

2. 1次元問題における自由端および固定端での反射

1次元問題における波動方程式は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

で与えられる。D'Alembertの解

$$u = f(ct+x) + g(ct-x)$$

をとり，自由端 $x=0$ へ波が入射する場合を考える。入射波 f に対し反射波を g_1 で表わせば境界での応力が0である条件より

$$f'(ct) = g_1'(ct)$$

の関係が得られる。そこで入射波，反射波それぞれによる境界での応力 σ_1, σ_2 は

$$\sigma_1 = Ef'(ct), \quad \sigma_2 = -Eg_1'(ct)$$

となり，反射波の応力は入射波のそれに対し符号が逆になって反射される。

固定端へ波が入射する場合，反射波を g_2 で表わすと

$$f(ct)+g_2(ct)=0$$

となりこれより

$$f'(ct)+g_2'(ct)=0$$

入射波，反射波それぞれによる境界での応力を σ_1, σ_2 とすると

$$\sigma_1=Ef'(ct), \quad \sigma_2=-Eg_2'(ct)$$

より反射波の応力は入射波のそれに対し符号を変えることなく反射される。

ここで自由端および固定端への入射，反射波をそれぞれ独立に求め重ね合わせるとき，合変位は

$$u = 2f(ct+x) + g_1(ct-x) + g_2(ct-x)$$

となり，境界での対応する応力 $(\sigma)_{x=0}$ は

$$(\sigma)_{x=0} = E\{2f'(ct) - g_1'(ct) - g_2'(ct)\} = 2Ef'(ct)$$

となり入射波による応力の2倍となって反射波による応力は現われてこない。すなわち自由端および固定端への入射，反射波の平均値をとると反射波の影響を除去することができる。

3. 2次元領域における弾性波の反射（自由，固定境界）

図-1,2のように x,z 座標をとり，平面ひずみ問題を考える。そこで $x=0$ へ平面P波あるいはS波が入射するとする。

(i) P波の反射

振幅 A_1 のP波が自由面へ α_1 の角をなして入射し，反射波の振幅，反射角をP波について A_2, α_2, S波について A_3, β_2 とすると次の関係が得られる。

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{2(\sin 2\beta_2 \sin^2\beta_2 \cos\alpha_1) - \cos^2 2\beta_2 \sin\alpha_1}{2(\sin 2\beta_2 \sin^2\beta_2 \cos\alpha_1) + \cos^2 2\beta_2 \sin\alpha_1}$$

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{2\sin 2\alpha_1 \sin\beta_2 \cos 2\beta_2}{2(\sin 2\beta_2 \sin^2\beta_2 \cos\alpha_1) + \cos^2 2\beta_2 \sin\alpha_1}$$

同様に固定面へ入射するとき

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{1-\tan\alpha_1\tan\beta_2}{1+\tan\alpha_1\tan\beta_2}\qquad \frac{A_3}{A_1}=\frac{-2\tan\alpha_1/\cos\beta_2}{1+\tan\alpha_1\tan\beta_2}$$

で表わされる。

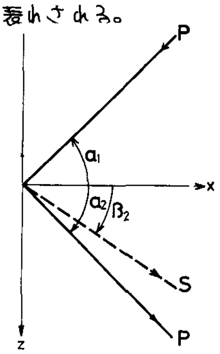

図-1. 境界における P波の反射.

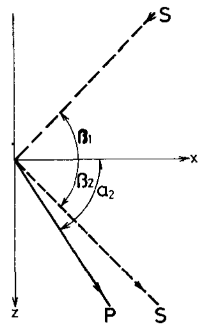

図-2. 境界における S波の反射.

(ii) S波の反射

先と同様にS波が自由面，固定面へ入射するとき，反射波の振幅は次のように表わされる。

$$\frac{B_2}{B_1}=\frac{\tan\alpha_2\cos 2\beta_1-2\tan 2\beta_1\sin^2\beta_1}{2\tan 2\beta_1\sin^2\beta_1+\tan\alpha_2\cos 2\beta_1}$$

$$\frac{B_3}{B_1}=\frac{2\sin\beta_1\sin 2\beta_1\cos 2\beta_1}{2\tan 2\beta_1\sin^2\beta_1+\tan\alpha_2\cos 2\beta_1}$$

および

$$\frac{B_2}{B_1}=\frac{\tan\alpha_2\tan\beta_1-1}{\tan\alpha_2\tan\beta_1+1}\qquad \frac{B_3}{B_1}=\frac{-2\sin\beta_1/\cos\alpha_2}{\tan\alpha_2\tan\beta_1+1}$$

これらと1次元問題の場合と同様に重ね合わせると入射角の小さい間はうまく反射波を消すことができるが大きくなるとS波の全反射の問題も含めてかなりの大きさの反射波が現われることになる。

4. 2次元領域における弾性波の反射（混合境界）

図-1, 2 において境界 $x=0$ は混合境界であるとし

境界A：$u=0$，$\tau_{xz}=0$，

境界B：$w=0$，$\sigma_x=0$

とする。P波が入射する場合，境界Aに対して

$$A_1=A_2,\quad A_3=0$$

が得られ，境界Bに対して

$$A_1=-A_2,\quad A_3=0$$

となる。S波の入射に対しては，境界Aに対して

$$B_1=-B_3,\quad B_2=0$$

が得られ，境界Bに対して

$$B_1=B_3,\quad B_2=0$$

となる。すなわちこのような混合境界に対しては入射P波に対する反射はP波のみを生じ，反射S波は生じない。また入射S波に対して反射はS波のみとなり反射P波は生じない。このことから重ね合わせを行うと完全な反射波の除去が期待される。

5. 問題点

これらの方法で数値計算するとき，自由，固定あるいはA，Bの両混合境界で反射された波を重ね合わせると反射波の成分は小さく，あるいは消滅することが期待される。しかし，これらの反射波がこれらの境界へ入射し，反射されるとき，この2度目の反射波の重ね合わせにより再び反射波が現われてくることになる。この影響を除去するため，2度目の反射が生じる前に重ね合わせを行って解を求め，それを入射波として計算をくり返すことが必要となる（この方法を逐次重ね合わせによる方法と呼ぶ）。

6. 数値計算

数値計算は空間の離散化に有限要素法を，時間の離散化には中央差分法を用いた。計算例としては(i)1次元棒，(ii)集中荷重を受ける半無限帯板，(iii)表面に集中荷重を受ける二次元半無限体内の応力状態，変位状態について検討した。

また十分に大きい空間領域について数値計算し，その解を正解として近似解と比較した。得られた結果を要約すると以下の通りである。

1. (i)の問題においてLysmerらの方法はほぼ正解を与える。重ね合わせによる方法も2回目の反射が生じるまでは正解を与え，逐次重ね合わせによる方法もかなり良い結果を示す。

2. (ii)の問題で混合境界による重ね合わせは2回目の反射が生じるまでは正解を与える。それ以後は逐次重ね合わせ法となるがLysmerらの方法と同程度の精度となる。自由，固定境界を用いると誤差はかなり現われる。

3. (iii)の問題では逐次重ね合わせ法を用いることになるが誤差はLysmerらの方法よりも若干大きくなる。