

石川 高寿 正会員 ○出村 禧典

金沢大学 正会員 小堀 為雄

1. まえがき

土木構造物の安全性の解析では、部材に生じる応力や部材の強度の、ばらつきや不確実性の特性を正確に把握することが重要である。しかし応力や部材強度のばらつきや不確実性には関係している要因が幾つかあり、これらの要因の中にはものばらつきや不確実性の特性が定量的に把握されている要因の他に技術者の直観的な判断に頼らざるを得ない要因も多く、したがって強度や応力のばらつきや不確実性の特性の把握も不正確になり、結局正確な安全性の解析が困難になる場合が多い。

本研究はこのように注目の点に注目したもので、安全性解析に信頼性理論を導入し、不確定要因の確率分布の不正確さと未知因数も設定することにより考慮し、多数の同様の構造物が建設され破壊されるという実績をこの未知因数の推定に利用し、安全性・信頼性のより正確な把握について考察を行なった。

2. 本研究の手法

応力や部材強度に関係している不確定要因を表わす確率変数を $X_1, \dots, X_n$ とし、 X_i の分布を示す結合確率密度関数を $f(X_1, \dots, X_n; \theta_1, \dots, \theta_n)$ とする。こゝに、 $\theta_1, \dots, \theta_n$ は未知因数とする。

推定形式は区間推定法を採用するものとし、次のような統計量を考える。

$$P(U; \theta_1, \dots, \theta_n)$$

$U = 1$ ---- 同様の n 個の構造物のうちの n 個の部材が破壊（なかつた）事象。

$U = 0$ ---- 同様の構造物のうちの n 個の部材が破壊（した）事象。

すなわち確率的な実験として、同様の部材から構成されている一連の構造物に荷重を載荷する。そして実験結果として $U = 1$ なる事象が実現したと考える、この実現値より $\theta_1, \dots, \theta_n$ なる未知因数も推定すると考える。

次に $P(U; \theta_1, \dots, \theta_n)$ の分布について説明する。

いまある一連の構造物 $n = 1, \dots, n_0$ (n_0 は構造物の数

) を考え、それぞれ n の構造物の部材数を n_{ij} とする。そして構造物 n の部材 j の保証荷重によつて生じる応力を σ_{ij} 、また部材の強度を R_{ij} とする。 σ_{ij} と R_{ij} の不確定要因との関係は次式のように与えられるとする。

$$R_{ij} = G R_{ij}^*(X_1^i, \dots, X_{m_{ij}}^i) \quad \text{----- (1)}$$

$$\sigma_{ij} = G \sigma_{ij}^*(X_1^i, \dots, X_{m_{ij}}^i) \quad \text{----- (2)}$$

部材 j の生存確率 pr_{ij} は次式より求められる。

$$\begin{aligned} Pr_{ij} &= \text{Prob.} (S_{ij} < R_{ij}) \\ &= \int \dots \int_{\sigma_{ij} < R_{ij}} f(X_1^i, \dots, X_{m_{ij}}^i; \theta_1, \dots, \theta_n) \\ &\quad dX_1^i \dots dX_{m_{ij}}^i \quad \text{----- (3)} \end{aligned}$$

こゝに $X_1^i, \dots, X_{m_{ij}}^i$ は、構造物 n の部材 j に関する不確定要因とし、今後 X_{ij} で表わす。

次に、 X_{ij} を次の三つの不確定要因に分ける。

$X_{ij,1}$: 部材ごとに変動する不確定要因

$X_{i,2}$: 構造物ごとに変動する不確定要因

X_3 : 同様の構造物全体に共通している不確定要因
さらに、 $X_{ij,1}$ の中には変動が全構造物の全部材に因属している要因、ある特定の構造物に因属している要因、また、ある特定の構造物の特定の部材のみに因属している要因に分けられる。 $X_{i,2}$ も X_3 も同様に分けられる。すなわち、未知因数は全構造物のすべての部材に関するものとする。

結合確率密度関数 $f(X_{ij})$ も次のように分解する。

$$f(X_{ij}) = f(X_3) \cdot f(X_{i,2} | X_3) \cdot f(X_{ij,1} | X_{i,2}, X_3) \quad \text{----- (4)}$$

こゝに $f(X_3)$ は X_3 に関する周辺密度関数である。すなわち、

$$P(U = 1; \theta) = \int \left\{ \prod_{i=1}^{n_0} Pr_i(X_3) \right\} f(X_3) dX_3 \quad \text{----- (5)}$$

こゝに、

$$pr_{ij}(X_3) = \int \left\{ \prod_{j=1}^{n_{ij}} pr_{ij}(X_{i,2}, X_3) \right\} f(X_{i,2} | X_3) dX_{i,2} \quad \text{----- (6)}$$

$$\begin{aligned} pr_{ij}(X_{i,2}, X_3) &= \int_{\sigma_{ij} < R_{ij}} f(X_{ij,1} | X_{i,2}, X_3) \\ &\quad dX_{ij,1} \quad \text{----- (7)} \end{aligned}$$

$$P(u=0; \theta) = 1 - P(u=1; \theta) \quad \text{--- (8)}$$

次に推定式であるが、未知母数に対して何らかの情報のある場合とない場合に分け、ある場合には未知母数を確率量と考える事前分布を考えるベイズの方法を採用し、ない場合には未知母数を未知の定数と考える。ネイマン・ピアソンの方法を採用する=とすると。

ネイマン・ピアソンの方法では仮説検定法は仮説・検定の両面と裏表の関係にあるから、次のように仮説・棄却領域を設定すれば、 α 1 種過誤、 α 2 種過誤 α_2 は (9) 式のように得られる。

仮説 $H_0: \theta \in \Theta_0$, 対立仮説 $H_1: \theta \in \Theta_1$

棄却領域: $u=1$, 採択領域 $u=0$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1(\theta) &= P(u=1; \theta) \\ \alpha_2(\theta) &= P(u=0; \theta) \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (9)}$$

すなわち、 θ_0 は $P(u=1; \theta) < \alpha$ ($1-\alpha$ は信頼度) を満足する母数の集合であり、 θ_1 は θ_0 の補集合である。

次にベイズの方法は、事前分布、事後分布 $W(\theta)$ 、 $W(\theta|u)$ とすなわち次式のように求められる。

$$f(\theta, u) = W(\theta) P(u|\theta) \quad \text{--- (10)}$$

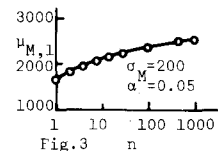
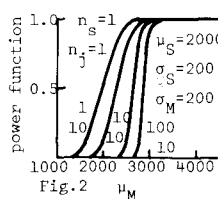
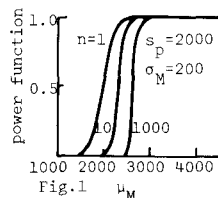
$$W(\theta) = \frac{f(\theta, u=1)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(\theta, u=1) d\theta} \quad \text{--- (11)}$$

3. 数値計算例と考察

以上述べた方法を幾つかのケースに適用した計算結果について説明する。Fig. 1 は、部材強度に關係する

不確定要因として材料の強度 M の考え、分布は正規分布とするものとし、未知母数は平均値 μ_M のみを考える標準偏差 σ_M は分っているとしたときの検出力函数の部材数 $n = n_0 \times$

n_0 による変化を示している。各応力はすべてこの部材に $\sigma = 2000 \text{ kg/cm}^2$ 全いたとし、Fig. 2 は、 σ も確率量とした場合の結果である。 σ は $\sigma_{0.2}$ に相当し、Fig. 2 よりも検出力は低くなっている。いずれも n が大きくなると検出力が大きくなる。なお図中の数の単位



は kg/cm^2 である。Fig. 3 は、信頼度 95% に対する $\mu_{M,1}$ (μ_M の下限値) の n による変化を示したもので、 n の増加に従って大きくなっていく。Fig. 4 はベイズの方法による事前分布と事後分布の構造物数 n による変化を示したもので、 n が大きくなると μ_M は大きい箇所に集中していく。Fig. 5 はベイズの方法による μ_M の下限値 $\mu_{M,1}$ の n による変化を示している。

Fig. 6, 7 は、保証荷重 2000 kg/cm^2 受けた構造物に 200 kg/cm^2 の応力と増加させたときの信頼度 95% の破壊確率の下限値を示した図で、 n の増加に従って破壊確率は小さくなる、といく。

Fig. 8 は、このような考え方を信頼性理論の設計への応用として注目されている 2 次元メント法による安全性指標への導入を考えたもので、東京大学の藤野氏の提案した保証荷重を考慮した安全性指標算出方法¹⁾により、 n による安全性指標の変化を計算した結果である。やはり n の増加に従って安全性指標の値は大きくなる、といく。

4. おわりに

分布の正確さと検討する n の考え方を示したが、未知母数の組み合わせの問題をささるに各種のケースについて数値計算等も行ない検討して行きたい。

参考文献

- 1) Yozo Fujino and Nials C. Lind, "Proof. Load Factors and Reliability" Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 103, No. ST 4, April, 1977.
- 2) Ang, A. H.-S., and Cornell, C. A., "Reliability Bases of Structural Safety and Design". Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 100, No. ST 9, Sept., 1974

