I-149　2次モーメント法による信頼性解析に関する基礎的考察

京都大学大学院　学生員　中野正則
京都大学工学部　正員　白石成人
京都大学工学部　正員　古田均

1 まえがき----- 構造物の安全性信頼性を定量的に評価する方法に、Cornell が提案した2次モーメント法がある。この方法では、安全性の尺度として、確率変数の2次までのモーメントで表わされる安全性指標(safety index) β が用いられる。この β は本来データに基づく量であり、sensitivity も小さく、計算が簡単な点からも設計への適用が容易であると考えられる。しかし、β のもつ問題点として、安全性の意味において、β の物理的、確率的な解釈が不明確であることが考えられる。そこで、本研究では、まず β の構造を、Ang の提案した拡張信頼性理論や Fiducialist あるいは Bayesian の考え方を用いて検討し、また、統計的不確定性やデータの使い方が、いかに β に反映されるかについて考える。さらに、Lind 等が提案した、"β が空間における破壊領域までの距離で定義できる" という考え方を用いて、簡単な例題により、β のもつ意味を考える。

2 Cornell による β の定義----- Cornell は確率変数の分布形は考えずに、2次までのモーメントを用いて安全性を評価している。いま、確率変数として、抵抗 R、荷重 S という2変数の場合を考えると、破壊領域の境界線を表わす performance function $Z(R,S)=0$ と、それに対する安全性指標 β は、R と S の独立性を仮定すると次のようになる。

$$Z = R - S \text{ -----------① }$$

$$\beta = \frac{\bar{Z}}{\sigma_Z} = \frac{\bar{R}-\bar{S}}{\sqrt{\sigma_R^2+\sigma_S^2}} \text{ -----② }$$

①, ②式の R, S の中には、種々の不確定性を含めることが可能であると考えられる。いま、Ang の提案した、拡張信頼性理論を基にして、モデルとその誤差あるいは他の不確定性を考慮する補正係数を導入し、β の構造を考える。簡単のために、これらの影響は S の補正係数に含められると考えると、performance function は、

$$Z = R - NS \text{ -----------③ }$$

と表わされる。ここで N の値の変動が小さい場合は、N を確定量とみなすことができ、1次近似を用いると β は、

$$\beta_1 = \frac{\bar{R}-\bar{N}\bar{S}}{\sqrt{\sigma_R^2+\bar{N}^2\sigma_S^2}} \text{ -----------④ }$$

となる。一方、N の値の変動が大きい場合は、N は確率量と考えられる。このときの β は次式で表わされる。

$$\beta_2 = \frac{\bar{R}-\bar{N}\bar{S}}{\sqrt{\sigma_R^2+\bar{N}^2\sigma_S^2+\bar{S}^2\bar{N}^2\Delta^2}} \text{ -----⑤ }$$

（ここで、$\bar{N}$, Δ は N の平均値, 変動係数を表わす）

⑤式によると、σ_R, σ_S 以外の種々の不確定性の影響は Δ に組み入れることができ、σ_R, σ_S に付加される形をしていて、σ_R, σ_S と同等に取り扱われている。なお、④, ⑤式は、過去の情報に現在の情報を加味してモデルを考えさらに、現場の特性や工学的判断によって補正係数を導入する場合の安全性を表わす指標と考えられる。"

一方、Fiducialist や Bayesian の考え方を用いると、β は確率量と考えることができる。これらの方法では、確率変数についての平均や標準偏差の確率分布形が、データや工学的判断によって求まり、確率量としての β が決まる。Bayesian の場合について簡単に説明する。例えば、R, S のそれぞれに関する支配的なパラメータを α_R, α_S とすると、次式のように形式的に β が表わされる。

$$\beta = \iint \frac{\bar{R}(\alpha_R)-\bar{S}(\alpha_S)}{\sqrt{\sigma_R^2(\alpha_R)+\sigma_S^2(\alpha_S)}} f_{\alpha_R}(\alpha_R) f_{\alpha_S}(\alpha_S)\, d\alpha_R\, d\alpha_S \text{ -----⑥ }$$

ここで、$f_{\alpha_R}(\alpha_R)$, $f_{\alpha_S}(\alpha_S)$ は、それぞれ α_R, α_S についての分布形で、Bayes の方法を用いて決定される。なお、この⑥式は、β の α_R, α_S に関する期待値である。これに対して、β を確率変数と考えると、β の分布形 $f_\beta(\beta)$ が求まれば、平均 $\bar{\beta}$ や標準偏差 σ_β が求まり、これらを用いて β に関する特性値 $\tilde{\beta}$ が次式のように表わされる。

$$\tilde{\beta} = \bar{\beta} + k_\alpha \cdot \sigma_\beta \text{ ----------⑦ }$$

⑦式では、β に関する不確定性以外の不確定性を k_α の中に導入できると考えられる。なお、Fiducialist と Bayesian との相違点は、前者は、データの個数に基づく統計的不確定性の影響を考えることができるが、後者は、個数のほかに、事前分布や尤度関数形の決定の際の工学的判断も影響を及ぼすと考えられる。

③ *Lindによるβの定義*[2)] ……Lindは空間における距離という概念でβを捉えている。すなわち"正規化した確率変数が作る空間において、原点から破壊領域までの最短距離でβが定義できる"としている。ここで正規化することは、確率変数の分布を用いて、原点（元の変数の平均値）からの方向性をなくして変数が一様に分布していることを仮定するものであり、これによって原点からの距離をとれば、破壊領域内の最も破壊しやすい点の安全性を表わすと考えられる。これについて、簡単な例題を用いてβの特性を探る。Angの考え方を用いると、Zとして④式が考えられ、FIG.1を参照すると、

$$\theta = \tan^{-1} N \qquad \therefore d\theta = \frac{dN}{1+N^2} \quad \text{------⑧}$$

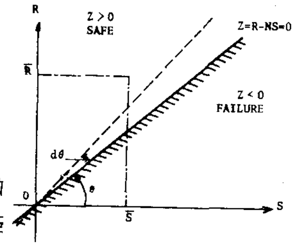


FIG. 1

となり、Nの変化が、破壊線Z＝0の方向を変化させることがわかる。さて、これを正規化されたr, s平面に変換すると、FIG.2のようになり、Nの影響は、座標軸r, sの目盛の大きさの決定には無関係で、破壊線z＝0の傾きと、原点からの距離を変化させるために働く。そこで変化量は、FIG.2より次式のようになる。

$$\Delta r = \frac{\bar{S}}{\sigma_R \cos^2\theta} d\theta , \quad \Delta s = \frac{\bar{R}}{\sigma_S \cos^2\theta} d\theta \quad \text{-----⑨}$$

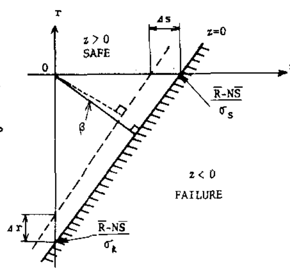


FIG. 2

ここで、Δr, Δs はNの変化によって生じたものであるが、見方を変えると、これらは、σ_R, σ_S の変化 $d\sigma_R$, $d\sigma_S$ によって生じたものへと置き換えて考えることができる。この場合、Nの変化dNは次式のように σ_R, σ_S の変化 $d\sigma_R$, $d\sigma_S$ に対応させうる。

$$\left.\begin{aligned} d\sigma_R &= \frac{\bar{S}}{\bar{R}-N\bar{S}}\,\sigma_R \cdot dN = \frac{1}{r_0 - N}\,\sigma_R \cdot dN \\ d\sigma_S &= \frac{\bar{R}}{\bar{R}-N\bar{S}}\,\sigma_S \cdot dN = \frac{r_0}{r_0 - N}\,\sigma_S \cdot dN \end{aligned}\right\} \text{---⑩} \quad \left[\begin{aligned} &\text{ここで、} r_0 \text{は} r_0 = \frac{\bar{R}}{\bar{S}} \text{で} \\ &\text{中央安全率を示す} \end{aligned}\right]$$

⑩式を解くと次のようになる。なお σ_{R_0}, σ_{S_0} は $N=1$ のときの σ_R, σ_S の値である。

$$\left.\begin{aligned} \sigma_R &= \sigma_{R_0}\left(1 + \ln \frac{r_0 - 1}{r_0 - N}\right) = \sigma_{R_0}(1+\lambda_R) \\ \sigma_S &= \sigma_{S_0}\left(1 + r_0 \ln \frac{r_0 - 1}{r_0 - N}\right) = \sigma_{S_0}(1+\lambda_S) \end{aligned}\right\} \text{-----⑪}$$

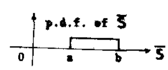
⑪式には、Nの影響が入っているので、σ_R', σ_S' と書き換えると、

$$\beta_3 = \frac{\bar{R} - \bar{N}\bar{S}}{\sqrt{\sigma_R'^2 + \sigma_S'^2}} \quad \text{--------⑫}$$

表 1

a	b	Δ	E[λ_R]	E[λ_S]	E[β_3]	β_2
0.90	1.10	0.0580	0.00651	0.01011	2.609	2.485
0.91	1.09	0.0522	0.00541	0.00852	2.613	2.501
0.92	1.08	0.0464	0.00471	0.00742	2.615	2.514
0.93	1.07	0.0406	0.00311	0.00492	2.620	2.527
0.94	1.06	0.0848	0.00271	0.00422	2.621	2.538
0.95	1.05	0.0290	0.00201	0.00312	2.624	2.547
0.96	1.04	0.0232	0.00221	0.00352	2.623	2.555
0.97	1.03	0.0174	0.00271	0.00422	2.621	2.561
0.98	1.02	0.0116	0.00101	0.00162	2.627	2.565
0.99	1.01	0.0058	0.00101	0.00162	2.627	2.568
1.00	1.00	0	0	0	2.630	2.569

Note
$\bar{R} = 2200$ $\sigma_R = 220$
$\bar{S} = 1400$ $\sigma_S = 210$
$r_0 = 1.571$



という②式に対応した形の β_3 で表わされる。Nが分布形をもつ場合 β_3 に関する期待値は、⑪、⑫式を用いて次のように表わされる。

$$E[\beta_3] = \frac{\bar{R} - \bar{N}\bar{S}}{\sqrt{\sigma_{R_0}^2(1+E[\lambda_R])^2 + \sigma_{S_0}^2(1+E[\lambda_S])^2}} \quad \text{-----⑬}$$

いま、$\bar{N} = 1$（すなわち偏りがない場合）とし、$\bar{S}$ について一様な分布を考えた場合に分布区間を変えたときの λ_R, λ_S, β_3 の期待値の計算例を表1に示す。なおこれと対応する β_2 を⑤式から求めた。この表より、β_3 の期待値は β_2 よりも大きな値をとっているが、これは、β_3 を求める計算の過程での近似が粗いためと思われる。しかし、Nの影響を σ_R, σ_S に置き換えることによる効果が λ_R, λ_S の形で表わされる点と、分布形をもつNに対しても β を求めることができ、Nの分布形の影響を含めることができると思われる。また、破壊領域の変化によってβが分布形 $f_\beta(\beta)$ をもつ場合、Nの影響が破壊領域の変化にどのくらい関係するかも把握できると思われる。

④ *むすび* ……安全性指標βの性質を、Angの提案した補正係数という考え方から考察を加え、それをLind等が提案したβの定義との関連を調べた。補正係数Nは、見方を変えれば、安全率に対応するものであると考えられる。よって、ここで示した関係式より、安全率を増加あるいは減少させたときの、荷重S, 抵抗Rへの影響が、それぞれの分散への影響として把握することができ、修正係数 λ_R, λ_S を用いると、概念的に、材料の品質の精度あるいは、荷重のばらつきの程度が類推できると考えられる。また、Nが分布形をもつという考え方を用いることにより、異なる工学的判断の導入の仕方が可能となり、安全性指標との関連も明らかにすることができると思われる。

参考文献 1) Ang and Cornell ; Reliability basis of structural safety and design, ASCE. ST9, 1974
2) Hasofer and Lind ; Exact and invariant second-moment code format, ASCE. EM1, 1974