I-146　劣化構造物の動的信頼性

川崎製鉄　正員　小池 武

1.まえがき

本報告はランダム荷重に対する構造物の耐用期間中の安全性を論じたものであり、とくに抵抗力が確率分布特性をもち，外荷重履歴に依存してその強度レベルが劣化してゆく場合，立場を変えれば荷重環境の悪化してゆく場合の動的信頼性についてその定式化を示したものである。

強度劣化効果を考慮した動的信頼性理論を展開するには，従来の初通過破壊確率に関する研究結果に加えて，それらの理論で論じられることのなかった抵抗力の時間領域における物理的，確率統計的両側面に亘る変化挙動を考慮した理論解析が必要になってくる。すなわち，抵抗力が物理的にも確率統計的にも荷重履歴に依存していることを認識しなければならない。

この認識の下に，本報告では任意のランダム過程に従う外荷重を被る構造物の抵抗力が任意の確率分布特性を示す場合の信頼性評価について論じ、とくにBayesの定理に基づく残存抵抗力の概念が本理論において重要な働きをすることを示す。

2.動的信頼性理論の定式化

2.1 基礎概念

2.1.1 信頼性関数　構造物の信頼性関数$\mathcal{L}$は荷重Sが抵抗力Rを超過しない確率として次式で定義される。

$$\mathcal{L} = P[\ S < R] \qquad \text{------------}(1)$$

いま、荷重が任意の確率過程に従うランダム変数$X(t)$として与えられ，抵抗力が載荷前の初期状態においてランダム変数R_0で表わされるとき，信頼性関数$\mathcal{L}(t)$は式(1)を用いて次式で定義することができる。

$$\mathcal{L}(t) = P[\max_{0\le\tau\le t}\{X(\tau)\} < R_0] \qquad \text{------------}(2)$$

初期抵抗力は荷重と独立であるため，式(2)は次のように展開できる。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t) &= \bigcup_{x\in\mathcal{D}_{R_0}} P[\max_{0\le\tau\le t}\{X(\tau)\} < x]\cdot P[x < R_0 \le x+dx] \\ &= \int_0^\infty L(t|x)\, f_{R_0}(x)\, dx\end{aligned} \qquad \text{----------}(3)$$

ただし、$f_{R_0}(x)$は初期抵抗力の確率密度，$\mathcal{D}_{R_0}$は初期抵抗力の定義域とする。ここで、

$$L(t|x) = P[\max_{0\le\tau\le t}\{X(\tau)\} < x] \qquad \text{-------------}(4)$$

は閾値レベルxに対する片側非超過確率であり，ここでは確定閾値xに対する条件付信頼性関数と呼ぶことにする。

2.1.2 残存抵抗力　荷重履歴を受けた後の抵抗力は生き残って存在している意味で残存抵抗力であり，もはや初期抵抗力の確率統計的性質とは異なる特性を示すことになる。すなわち，残存抵抗力は時刻tにおいて生き残っているという条件付確率として次式で定義されることになる。

$$f_R(x|t)\,dx = P[\,x < R_0 \le x+dx \mid \text{survival at } t\,] \qquad \text{------------}(5)$$

式(5)にBayesの定理を適用すれば，残存抵抗力は事前確率密度$f_{R_0}(x)$に対する事後確率密度として次のように展開できる。

$$\begin{aligned}f_R(x|t)\,dx &= P[\,x < R_0 \le x+dx \mid \max_{0\le\tau\le t}\{X(\tau)\} < R_0] \\ &= \frac{L(t|x)\, f_{R_0}(x)\, dx}{\int_0^\infty L(t|x)\, f_{R_0}(x)\, dx}\end{aligned} \qquad \text{-----------}(6)$$

2.1.3 危険関数

危険関数は時刻tまで生き残っているという条件下での次の微小時間dtにおける破壊確率として定義され，それは信頼性関数を用いて次のように与えられる。

$$h(t) = -d\mathcal{L}(t)/dt \cdot 1/\mathcal{L}(t) \qquad \text{------------}(7)$$

式(4)で定義される条件付信頼性関数$L(t|x)$が時間tに関して微分可能であれば、式(7)に式(3)を代入すると次の関係を得る。

$$\lambda(t) = \frac{\int_0^\infty L(t|x)\,h(t|x)\,f_{R_0}(x)\,dx}{\int_0^\infty L(t|x)\,f_{R_0}(x)\,dx} \qquad \text{----------(8)}$$

ただし、式(8)の被積分関数の1つである$h(t|x)$は確定閾値xに対する条件付危険関数として次式で与えられる。

$$h(t) = -dL(t|x)/dt \cdot 1/L(t|x) \qquad \text{----------(9)}$$

したがって、式(6)を用いて式(8)を整理すると危険関数$\lambda(t)$は次の表現を得る。

$$\lambda(t) = \int_0^\infty h(t|x)\,f_R(x|t)\,dx \qquad \text{----------(10)}$$

従来の研究において、荷重と抵抗力の独立性が任意の時刻において成立するとの仮定の下に残存抵抗力$f_R(x|t)$の代りに初期抵抗力$f_{R_0}(x)$を用いて危険関数を算定した例があるが、両者が一致するのは式(6)より$L(t|x)=1$がすべての時間領域で成立する場合に限られ、その場合の$\lambda(t)$は常に零という自明解となる。従って、抵抗力が確率分布特性を示す場合には初期抵抗力と残存抵抗力の違いを十分に認識しておく必要がある。

2.2 荷重

構造物はその耐用期間中に受ける外荷重作用の累積によってその物理的性質を変化させる。それが一般に抵抗力の劣化として現象する。信頼性理論における荷重とはこのような外荷重による構造物内部の応答量であり、荷重累積の結果が抵抗力に影響を与える性質のものである。逆に言うと、外荷重作用を受けた後の抵抗力の変化はすべて荷重作用に帰因するものであり、立場を変えて見ればこの変化を荷重環境の悪化という形で把握することができる。ここでは、荷重は外荷重に対する応答値と抵抗力劣化関数の両者の関数として定義する。

2.2.1 定義

荷重$Q(t)$を次式で定義する。

$$Q(t) = F[\,A,\ S(t),\ \Phi\{S(\tau);\ 0<\tau\le t\}\,] \qquad \text{----------(11)}$$

ここで、$S(t)$：外荷重，A：構造物応答特性値，$\Phi(\ )$：抵抗力劣化関数である。

荷重$Q(t)$と外荷重$S(t)$とが比例関係にあるかどうか，抵抗力劣化関数が時間のみに依存するのか，または外荷重履歴に依存するのかによって次の3つの場合に分類できる。

(i) 線形非劣化荷重　$Q(t) = A\,S(t)$ -----(12)，　(ii) 線形劣化荷重　$Q(t) = A\,S(t)\,\Phi(t)$ ----------(13)

(iii) 非線形劣化荷重　$Q(t) = A\,S(t)\,\Phi[\,S(\tau);\ 0<\tau\le t\,]$ -------(14)

2.2.2 荷重の確率分布

外荷重が連続型であるか離散型であるかによって荷重の確率分布は次の表現となる。

(i) 連続型外荷重の場合　荷重$Q(t)$のランダム過程が$\{X(t)\}$で与えられているとき，確定閾値に対する条件付信頼性関数$L(t|x)$は次式で与えられる。

$$L(t|x) = L(0|x)\,\exp[-\int_0^t h(\tau|x)\,d\tau] \qquad \text{----------(15)}$$

式(15)の一般解は既にS.O. Rice[1]により与えられているので略す。

(ii) 離散型外荷重の場合　荷重Qのランダム過程が$\{X_i\}$で与えられているとき，条件付信頼性関数は次式となる。

$$L(n|x) = L(X_1, X_2, \text{-----}, X_n\,|\,x) \qquad \text{----------(16)}$$

とくに，事象$E_i[X_i<x]$と$E_j[X_j<x]$とが独立でない場合、条件付信頼性関数の一般解は次の表現を得る。

$$L(n|x) = \sum_{i\neq 1} P[X_1<x]\,P[X_1>X_i] + \sum_{i\neq 2} P[X_2<x]\,P[X_2>X_i] + \sum_{i\neq j\neq 3} P[X_3<x]\,P[X_3>X_i>X_j] + \text{-----}$$

$$= \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \int_{A_{1k}} dx_1 \int_{A_{2k}} dx_2 \text{---} \int_{A_{nk}} f_{X_1X_2\cdots X_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,dx_n \qquad \text{----------(17)}$$

また，非線形劣化荷重のランダム過程が$X_i = A\,S_i\,\Phi(s_1, s_2, \cdots, s_i)$で与えられる時の信頼性関数は、$\Phi(s_1, s_2, \cdots s_i) = \prod_{k=1}^{i} \varphi^{-1}(s_k)$の場合について既に著者と亀田によって次式のように与えられている。

$$\mathcal{L}(n) = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \int_{D_{1k}} dy_1 \int_{D_{2k}} dy_2 \cdots \int_{D_{nk}} \{1 - F_{R_0}(\sigma_{nk}/\alpha_{n_i}(y))\}\,f_{s_1s_2\cdots s_n}(y_1, y_2, \cdots, y_n)\,dy_n \qquad \text{----------(18)}$$

ただし，式(17)，(18)におけるA_{ik}，D_{ik}は積分域，$\alpha_{ik}(y) = \prod_{j=k}^{i} \varphi(y_j)$である。

参考文献

1) Rice, S.O.: Mathematical Analysis of Random noise, Selected Paper on Noise and Stochastic Process, Dover, N.Y., 1955.