

鳥取大学工学部 正会員 ○白 木 渡
鳥取大学工学部 正会員 高 岡 宣 善

1. まえがき 非定常不規則な初期たわみを有する圧縮部材の信頼性解析を不規則関数論を用いて行った。まず、グリーン関数の手法¹⁾を用いて初期たわみの分散関数から与えられた荷重のもとでの部材のたわみの分散関数を求め、そのたわみの分散関数が部材に沿った座標値および荷重パラメータによってどのように変化するかを調べた。また、超過の理論を導入し、たわみおよびその1次導関数のたわみ角が非定常正規確率関数であるとした場合、たわみが部材の全長であるレベルを超過する超過確率の算定式を誘導した。そしてその式を用いて数値計算を行い、荷重パラメータおよび超過レベルをパラメータにとって超過確率の変化を調べた。

2. 初期たわみを有する圧縮部材 図-1に示すような初期たわみ $W(x)$ を有する両端ヒンジの弾性圧縮部材に軸方向力 N が作用している場合を考える¹⁾。いま、 $\ell = \sqrt{N/EI}$ で定義される荷重パラメータおよび $\xi = x/L$ で示される無次元距離を導入すると、この場合のたわみ $Y(\xi)$ を支配する微分方程式は、圧縮部材の弾性安定理論より次式で与えられる：

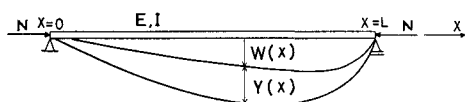


図-1

$$\frac{d^4 Y(\xi)}{d\xi^4} + (\ell L)^2 Y(\xi) = -(\ell L)^2 W(\xi) \quad (1)$$

ここで、境界条件は、 $Y(0) = Y(1) = 0$ である。

さて、式(1)を次式で示されるグリーン関数

$$G_1(\xi, \eta) = \frac{\ell L}{\sin \ell L} [\sin \ell L(1-\eta) \sin \ell L \xi] \quad 0 < \xi < \eta, \quad G_2(\xi, \eta) = \frac{\ell L}{\sin \ell L} [\sin \ell L \eta \sin \ell L(1-\xi)] \quad \eta < \xi < 1 \quad (2)$$

を用いて解くと、たわみ $Y(\xi)$ は、

$$Y(\xi) = \int_0^\xi G_2(\xi, \eta) W(\eta) d\eta + \int_\xi^1 G_1(\xi, \eta) W(\eta) d\eta \quad (3)$$

次式で表わされる：

3. 非定常不規則な初期たわみ

初期たわみ $W(\xi)$ は、材軸方向に関して不規則に変動する不規則関数とする。また、 $W(\xi)$ は境界条件より端部で必ず0であり、部材上だけの有限区間で定義されているので、非定常不規則関数と考えなければならない^{2), 3)}。初期たわみ $W(\xi)$ の期待値は、定義域すべてで0とし、自己相関関数 $K_W(\eta_1, \eta_2)$ は、 η_1, η_2 座標において $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$ の4点で0であるということと考慮して、次式のような2次元フーリエ級数で表わすことにする。

$$K_W(\eta_1, \eta_2) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} K_{ij} \sin i\pi\eta_1 \sin j\pi\eta_2, \quad K_{ij} = 4 \int_0^1 \int_0^1 K_W(\eta_1, \eta_2) \sin i\pi\eta_1 \sin j\pi\eta_2 d\eta_1 d\eta_2 \quad (4)$$

いま、適当な一定値 D_0 を選んで、 $d_{ij} = K_{ij}/D_0$ ($i, j = 1, 2, \dots$)とおくと、 $W(\xi)$ の分散関数 $D_W(\eta) = E[W^2(\eta)] = K_W(\eta, \eta)$ の材軸に沿った平均値 $\bar{D}_W$ および $W(\xi)$ の自己相関関数は次式のようになる：

$$\bar{D}_W = \frac{D_0}{2} \sum_{i=1}^{\infty} d_{ii} \quad (5), \quad K_W(\eta_1, \eta_2) = D_0 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} d_{ij} \sin i\pi\eta_1 \sin j\pi\eta_2 \quad (6)$$

実際に初期たわみを測定したデータは少ないが、強軸まわりのたわみはほぼ第1項の半波形正弦波の成分が卓越し、弱軸まわりでは第2項、第3項の成分もみられることが知られている^{2), 3)}。本研究では、文献(2)における数値を参考にして、 d_{ij} は次のように仮定する。CASE 1 : $d_{11} = 1.0$, CASE 2 : $d_{11} = 1.0, d_{22} = 0.15, d_{33} = 0.03, d_{44} = 0.01$ 。CASE 1は、第1項の半波形正弦波の成分のみ、CASE 2は、第4項までの成分を考慮した場合である。

4. たわみに関する信頼性解析 (a) CASE 1の場合 初期たわみ $W(\xi)$ が期待値0の非定常不規則関数であるから、式(3)よりたわみ $Y(\xi)$ も期待値0の非定常不規則関数となる。式(3)と(6)から、この場合のたわみの分散関数

は次式のようになる。

$$D_Y(\xi) = E[Y^2(\xi)] = D_0 \left[\int_0^{\xi} G_2(\xi, \eta) \sin \pi \eta d\eta + \int_{\xi}^1 G_1(\xi, \eta) \sin \pi \eta d\eta \right]^2 \quad (7)$$

CASE 1 の場合は、 $Y(\xi)$ と $\dot{Y}(\xi)$ は完全相関関係にあるので、 $Y(\xi)$ が与えられたレベル $|a| = n\sqrt{D_0}$ (n は正の実数) を超過する超過確率 Q は、最も危険なスパン中央における値となる。いま、スパン中央のため $Y(\xi)|_{\xi=0.5}$ が期待値 0 の正規分布であると仮定すると、この場合の超過確率は次式となる。

$$Q = 2 \left\{ 1 - \Phi \left[\frac{n\sqrt{D_0}}{\sqrt{D_Y(\xi)}} \right] \right\} \quad (8)$$

(b) CASE 2 の場合

この場合のため $Y(\xi)$ と $\dot{Y}(\xi)$ の分散関数も CASE 1 の場合と同様にして次式のようになる。

$$D_Y(\xi) = E[Y^2(\xi)] = D_0 \left\{ \alpha_{11} \left[\int_0^{\xi} G_2(\xi, \eta) \sin \pi \eta d\eta + \int_{\xi}^1 G_1(\xi, \eta) \sin \pi \eta d\eta \right]^2 + \alpha_{22} \left[\int_0^{\xi} G_2(\xi, \eta) \sin 2\pi \eta d\eta + \int_{\xi}^1 G_1(\xi, \eta) \sin 2\pi \eta d\eta \right]^2 + \alpha_{33} \left[\int_0^{\xi} G_2(\xi, \eta) \sin 3\pi \eta d\eta + \int_{\xi}^1 G_1(\xi, \eta) \sin 3\pi \eta d\eta \right]^2 + \alpha_{44} \left[\int_0^{\xi} G_2(\xi, \eta) \sin 4\pi \eta d\eta + \int_{\xi}^1 G_1(\xi, \eta) \sin 4\pi \eta d\eta \right]^2 \right\} \quad (9)$$

CASE 2 の場合は、 $Y(\xi)$ と $\dot{Y}(\xi)$ は完全相関関係にはない。つまり相関係数

$$\rho(\xi) = \frac{E[Y(\xi)\dot{Y}(\xi)]}{\sqrt{E[Y^2(\xi)]E[\dot{Y}^2(\xi)]}} \quad (10)$$

が ± 1 ではない値をとる。この場合には、非定常不規則関数のレベル超過

問題として解析する必要がある。

$$P(y, \dot{y}|\xi) = \frac{1}{2\pi\sqrt{(1-\rho^2)E[Y^2(\xi)]E[\dot{Y}^2(\xi)]}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{y^2}{E[Y^2(\xi)]} - \frac{2\rho y\dot{y}}{\sqrt{E[Y^2(\xi)]E[\dot{Y}^2(\xi)]}} + \frac{\dot{y}^2}{E[\dot{Y}^2(\xi)]} \right] \right\} \quad (11)$$

いま、 $Y(\xi)$ と $\dot{Y}(\xi)$ との結合確率密

度関数が式(11)で与えられるものとする、非定常不規則関数 $Y(\xi)$ が定数レベル $a = n\sqrt{D_0}$ を正の傾きで超過する超過確率密度 $\lambda(a|\xi)$ に対して、Freudenthal と Shinozuka によ、1 次式の近似公式が与えられている⁴⁾。

$$\lambda(a|\xi) = \frac{1}{2\pi} \frac{E[\dot{Y}^2(\xi)]}{E[Y^2(\xi)]} \left[\sqrt{1-\rho^2} \exp \left\{ -\frac{1}{1-\rho^2} \frac{n^2 D_0}{2E[Y^2(\xi)]} \right\} + \sqrt{1-\rho^2} \frac{|\rho| n \sqrt{D_0}}{\sqrt{E[Y^2(\xi)]}} \exp \left\{ -\frac{n^2 D_0}{2E[Y^2(\xi)]} \right\} \right] \quad (12)$$

したがって、レベルの大きさが正負共に等しく、レベルを超過する事象

がポアソン分布で近似できるとすると、この場合の超過確率は次式となる。

$$Q = 1 - \exp \left[-2 \int_0^1 \lambda(a|\xi) d\xi \right] \quad (13)$$

5. 数値計算例および考察

式(7)および(9)を用いて CASE 1 および CASE 2 の場合の分散関数を計算し、そ

れらの値が座標値 ξ および荷重パラメータ n によってどのように変化するかを示したのが表-1 である。表か

う明らかのように n が 0.5 に近づくに従って、また n が大きくなるに従って分散関数は大きくなっている。そ

して CASE 2 の方が CASE 1 よりわずかではあるが分散関数の値は大きい。これ

は第 2 項以上の項の影響によるものと考えられる。表-2 は、CASE 2 の場合の

相関係数を式(10)を用いて計算したものを示したものである。 n が 0.5 に近づくに

従って相関性が失われていることが分る。図-2 は、式(8)および(9)を用いて超過

確率を計算したものである。CASE 2 の場合の方が Q の値が大きいことが分る。

表-1

ξ	KL = 2.0		KL = 2.8	
	$\Sigma \alpha_i = 1.00$	$\Sigma \alpha_i = 1.19$	$\Sigma \alpha_i = 1.00$	$\Sigma \alpha_i = 1.19$
0.05	$E[Y(\xi)]/D$	$E[\dot{Y}(\xi)]/D$	$E[Y(\xi)]/D$	$E[\dot{Y}(\xi)]/D$
0.10	0.1136494 $\times 10^3$	0.1156310 $\times 10^3$	0.3651524	0.3660994
0.15	0.4434729 $\times 10^3$	0.4505581 $\times 10^3$	0.1424866 $\times 10^3$	0.1428257 $\times 10^3$
0.20	0.9571849 $\times 10^3$	0.9703763 $\times 10^3$	0.3075409 $\times 10^3$	0.3081736 $\times 10^3$
0.25	0.1604500	0.1622373	0.5155214 $\times 10^3$	0.5163809 $\times 10^3$
0.30	0.2322054	0.2341455	0.7460696 $\times 10^3$	0.7470047 $\times 10^3$
0.35	0.3039608	0.3056942	0.9766178 $\times 10^3$	0.9774545 $\times 10^3$
0.40	0.3686923	0.3699480	0.1184598 $\times 10^3$	0.1185204 $\times 10^3$
0.45	0.4200635	0.4207514	0.1349653 $\times 10^3$	0.1349983 $\times 10^3$
0.50	0.4644108	0.4644775	0.1492139 $\times 10^3$	0.1492167 $\times 10^3$

表-2

ξ	$\rho(\xi)$		
	KL = 1.2	KL = 2.0	KL = 2.8
0.05	0.9999980	0.9999437	0.9999894
0.10	0.9985935	0.9991690	0.9987921
0.15	0.9943764	0.9965072	0.9989409
0.20	0.9872103	0.9918527	0.9972813
0.25	0.9792745	0.9869707	0.9956692
0.30	0.9715046	0.9832690	0.9962870
0.35	0.9544345	0.9746404	0.9962176
0.40	0.8833765	0.9263803	0.9754774
0.45	0.6131379	0.6951395	0.8228707
0.50	-0.01015668 $\times 10^3$	-0.8371878 $\times 10^3$	-0.3985534 $\times 10^3$

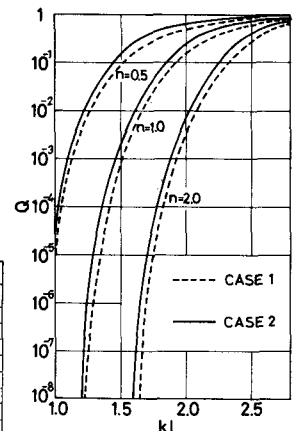


図-2

- 1) R.G. Jacquot: Nonstationary Random Column Buckling Problem, ASCE, Vol. 98, No. EM5, Oct., 1972, pp. 1173-1182.
- 2) 藤本・岩田: 鋼圧縮部材の強度の確率論的方法による研究—ラジアル初期ねじれを有する圧縮材—, 日本建築学会論文報告集, No. 218, pp. 17-25, 1974-4.
- 3) 青木・福本: 鋼柱の屈曲強度のばらつきにおよぼす残留応力分布の影響について, 土木学会論文報告集, No. 201, pp. 31-41, 1972-5.
- 4) A.M. Freudenthal and M. Shinozuka: Probability of Structural Failure under Earthquake Acceleration, Trans. Japan Soc. Civ. Engrs, No. 118, 1965.