I-133　トラスの一最小重量設計法について.

信州大学工学部　正員　小山 健
信州大学工学部　正員　長 尚

1. 序

応力制限を受けるトラスの最小重量設計の一方法としてSchmitらによって提案された方法[1]は，計算の効率が良いことと，全体的最適解が得られるのが特長だとしているが，筆者らの研究によるとこの方法は特殊な問題以外は正解が得られないことが判った。以下この方法の問題点を指摘し，修正法について述べる。

2. Schmitらの方法の概要

トラスを基本静定系と余部材とに分解し，応力制限の制約条件式を次のように書き表わす。$P_{ik}+\sum_{j=1}^{J} r_{ij}R_{jk}-A_i\sigma_{ti}\leq 0$　，$P_{ik}+\sum_{j=1}^{J} r_{ij}R_{jk}-A_i\sigma_{ci}\geq 0$　（$i=1,\cdots,I$），（$k=1,\cdots,K$）……(1)　ここに，P_{ik}：k載荷状態における基本静定系のi部材の軸力，r_{ij}：j余部材に単位の力が作用したときの基本静定系のi部材の軸力，R_{jk}：k載荷状態におけるj余部材の軸力，A_i：i部材の断面積，σ_{ti}：i部材の許容引張応力度，σ_{ci}：i部材の許容圧縮応力度，I：部材総数，J：余部材数，K：載荷状態の数である。この式において，P_{ik}，r_{ij}は基本静定系に関するものであるから予め計算で求めておくことができる。したがって式(1)中の変数はR_{jk}およびA_iで，その総数は，I＋JK個である。この式(1)ではつりあい条件は満足されているが，適合条件は満たされていない。そこで近似的な適合条件式として次式を制約条件に追加する。$R_{jk}\varepsilon_{j,k-1}-R_{j,k-1}\varepsilon_{jk}=0$（$j=1,\cdots,J$），（$k=2,\cdots,K$）……(2)　ここに$\varepsilon_{jk}$は断面積の近似値$A^0$を用いたときの，$k$載荷状態におけるj余部材のひずみである。この式は，載荷状態によって余部材の面積は違うものではなく，余部材の断面積はただ一組しかないという条件を，近似的なひずみの条件を用いて表現した，適合条件式である。これらの式の他に，断面積の上下限制限式として次式を制約条件に加える。$A_i^{l}\leq A_i\leq A_i^{u}$（$i=1,\cdots,I$）……(3)　目的関数は全容積を最小にすることとし，次式で表わす。$Z=\sum_{i=1}^{I} L^i A_i \rightarrow min.$ ……(4)　ここにL^iはi部材の長さである。以上のように定式化すると，式(1)～(4)の制約条件および目的関数はすべて変数R_{jk}，A_iに関する一次式である。したがってこの問題は線形計画の問題となる。ただし式(2)の制約条件式が近似式であるから，一回のLP計算では一般に解は得られない。そこでSchmitらは，まず最初のLP計算では式(2)の制約条件を除いて解き，以後前回の解を近似値として用いて，収束するまでLP計算を繰り返す方法を提案している。

3. 問題点

線形計画の問題の最適解は少なくとも変数の数に等しい数の制約条件式がちょうど条件一杯となるという性質を持っている。したがってこのSchmitらの方法では，制約条件式の総数，2I(K＋1)＋J(K−1)個（式(1)が2IK個，式(2)がJ(K−1)個，式(3)が2I個）のうち，少なくとも，I＋JK個の式は条件一杯とならなければならない。一方一つの部材に着目すれば，式(1)，(3)で表わされる応力の制限式2K個，寸法制限式2個，合計2(K＋1)個のうちただ1個の式が条件一杯で，他は一般に余裕があるはずである。したがって式(1)，(3)の不等式制約条件中で制約条件一杯となる必要があるのは部材数と同じI個だけとなり，これに等式条件である，式(2)の，J(K−1)個を加えた，合計I＋J(K−1)個だけが条件一杯でよいということになる。この数は変数の数よりJ個少ない。したがって，式(1)～(4)のLPの解は，この他に式(1)，(3)の中から，必要以上にJ個の制約条件式が条件一杯となっていることになり，この方法では一般に正解より容積の多い解を得ることになる。このようになる原因は，変数のうちの余力R_{jk}の数が，JK個あるにもかかわらず，適合条件式の数がそれよりJ個少ない，J(K−1)個しかないためである。なおSchmitらの計算例ではJ個の不

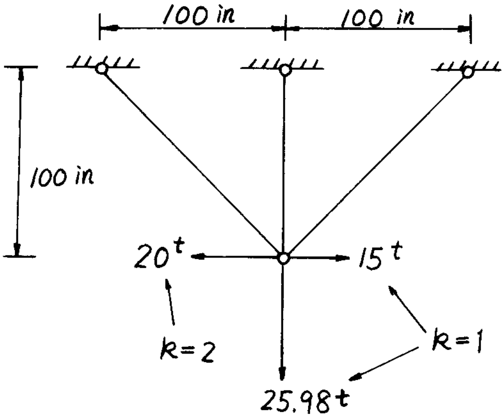
足分は，いずれもJ個の部材の下限条件（$A_i \geqq 0$）が一杯というもので補なわれており，つまり最適解は静定構造となっている。このような例では正解となることもあり得る。

4. 修正法

前節で指摘した問題点を解決するためには，JK個の適合条件式が必要である。そこで式（2）の適合条件式に代るものとして次式で表わされる，JK個の式を用いることにする。$R_{jk} - \sigma_{jk}^{o} A_j = 0$　（$j = 1, \cdots, J$），（$k = 1, \cdots, K$）----（5）　ここに，σ_{jk}^{o}は断面積の近似値A^{o}を用いたときのj部材の応力度である。ただしσ_{jk}^{o}が許容応力度を超えた場合には応力度が許容応力度の方向に進むように，σ_{jk}^{o}と許容応力度の中間値を用いて，式（5）を次のように変更する。$R_{jk} - \sigma_{jk}^{m} A_j = 0$　（$\sigma_{jk}^{o} < \sigma_{cj}$　又は　$> \sigma_{tj}$　のとき）----（6）　ここに，$\sigma_{jk}^{m} = 0.5(\sigma_a + \sigma_{jk}^{o})$ ----（7），$\sigma_a = \sigma_{cj}$（$\sigma_{jk}^{o} < \sigma_{cj}$ のとき）又は σ_{tj}（$\sigma_{jk}^{o} > \sigma_{tj}$ のとき）である。

5. 計算例

Schmitらの示した計算例は3例あるが，本修正法を用いても結果は同じであった。その理由は，3で述べたようにこれらの3例はいずれも余部材の数だけの部材が消滅して静定構造が最適解となるケースで，その消滅する部材の下限条件がJ個条件一杯となり，変数の数と条件一杯の式の数とが一致して最適解が得られている。しかし一般にはそのようにならない。その一例として，Kumarらが示した，3本部材トラス（図－1）の例[2)]について示す。この問題の正解は，$A_1 = 1.071\ in^2$，$A_2 = 0.544\ in^2$，$A_3 = 0.611\ in^2$である。不等式制約条件が一杯となるのはすべて応力の制限式で，$k=1$のときの2部材の引張応力度，$k=2$のときの1部材の圧縮応力度および3部材の引張応力度の計3個で，これは前述したように部材数に一致している。本修正法でも同じ結果が得られたが，Schmitらの方法では，$A_1 = 1.061\ in^2$，$A_2 = 0.549\ in^2$，$A_3 = 0.619\ in^2$となり，不等式制約条件が一杯となったのは，$k=1$のときの1，2部材の引張応力度，$k=2$のときの1部材の圧縮応力度および3部材の引張応力度の計4個である。この例では不静定次数J＝1であるから，先に指摘したように，部材数より1つ余分の応力制限式が条件一杯となっている。そのため，目的関数の値は，最適解のときが$292.2\ in^3$であったのに対し，$292.4\ in^3$と大きくなっている。この例では正解との差は余りないが，その理由は，最適解を用いたときの，$k=1$の1部材の応力度が許容応力度に近かったためである。いずれにしても，Schmitらの方法では，3で述べたような問題点が存在することが具体例によって示されたことになる。紙面の都合でこの他の例について詳しく触れられないが，連続トラスの例について，Schmitらの方法を適用したところ，部材の下限条件が余分に条件一杯となったため，静定トラスが解となり，正解が得られなかったことを付記する。なお本修正法を用いる場合，式（5），（6）は近似式であるから，初期値の与え方によっては局所的最適解に収束することがあり得る。したがって色々な初期値について計算するとか，モンテカルロ法で予め近似値を探すとかの工夫が，通常の非線形計画問題と同様に必要であることを断っておく。



$A^{o} = \{1.5\ in^2,\ 1.0\ in^2,\ 0.8\ in^2\}$
$A^{u} = 20\ in^2$，$A^{\ell} =$
$\sigma^{u} = 20\ t/in^2$，$\sigma^{\ell} = -15\ t/in^2$

図－1

参考文献　1) Farshi, B. and L. A. Schmit, Jr.: Minimum Weight Design of Stress Limited Trusses, Proc. of ASCE, Vol 100, No ST1, 1974.　2) Kumal, P. et al.: Application of Linear Programming to Optimization of Structures, Indian Concrete Jour. Oct. 1967.