I-130　幾何計画法によるSUMTについて

室蘭工業大学　正員　杉本博之

1．まえがき　幾何計画法は，多項式からなる最適化問題の解法としては，他の非線形計画法にないすぐれた特徴をもっているが，また，その有効な適用範囲がかなり限定されることも指摘されている。そこで，近似関数を用いる手法[1)]，多項式を凝縮する手法[2)]等が発表されているが，土木構造物の設計のように，制約条件の数が多くかつ複雑である場合には，それらの手法の有効な応用は困難であると思われる。そこで本文では，SUMTの計算過程の修正目的関数の最適化に幾何計画法を応用することを試み，簡単なトラス構造物の最小重量設計に応用して，SLP，直接探索法，最大傾斜法によるSUMTと計算精度，計算時間を比較した。

本文では，制約条件式に関して特に制限はないが，目的関数は，その項数が設計変数の数に等しい正多項式としている。

2．理論の概要　詳細[3)]は省略し，結果のみを書くと以下のようになる。

まず，主問題は以下のように定義される。

$$g_j \geqq 0 \quad ; \quad j = 1 \ldots m \tag{1}$$

のもとで，

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i \prod_{k=1}^{n} x_k^{\alpha_{ik}} \tag{2}$$

を最小にせよ。ここで，

$$c_i > 0 \quad , \quad x_i > 0 \quad ; \quad i = 1 \ldots n$$

以上をSUMT変換すると，次の修正目的関数を最小にするという問題になる。

$$F = \sum_{i=1}^{n} c_i \prod_{k=1}^{n} x_k^{\alpha_{ik}} + \gamma_\ell \sum_{j=1}^{m} (g_j)^{-\beta} \quad ; \quad \ell = 1 \ldots L \tag{3}$$

さらに，式（3）の第2項を多項式近似すると，Fは次の関数で近似される。

$$F = \sum_{i=1}^{n+1} c_i \prod_{k=1}^{n} x_k^{\alpha_{ik}} \tag{4}$$

ここで，

$$c_{n+1} = \gamma_\ell \left\{ \sum_{j=1}^{m} (g_j^{(1)})^{-\beta} \right\} \prod_{k=1}^{n} (x_k^{(1)})^{-\alpha_{n+1k}}$$

$$\alpha_{n+1k} = -\frac{\beta x_k^{(1)}}{\sum_{j=1}^{m} (g_j^{(1)})^{-\beta}} \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial g_j}{\partial x_k}\right)^{(1)} (g_j^{(1)})^{-(\beta+1)} \quad ; \quad k=1 \ldots n$$

式（4）は，困難度が0の問題であり，幾何計画法を応用すると，式（4）を最小にするXは，次のように容易に求まる。

$$x_i = 10^{X_i} \quad ; \quad i=1 \ldots n \tag{5}$$

ここで，

$$[X_1 \ X_2 \ldots\ldots X_n] = (A^{-1})^T S \quad , \quad [\lambda_1 \ \lambda_2 \ldots\ldots \lambda_n]^T = \frac{A^{-1}B}{1 - IA^{-1}B} \quad , \quad \lambda_{n+1} = \frac{1}{1 - IA^{-1}B}$$

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \cdots\cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \cdots\cdots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} \cdots\cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \quad , \quad S = \begin{bmatrix} \log \lambda_1 - \log c_1 + \log z \\ \log \lambda_2 - \log c_2 + \log z \\ \vdots \\ \log \lambda_n - \log c_n + \log z \end{bmatrix} \quad z = \prod_{i=1}^{n+1} \left(\frac{c_i}{\lambda_i}\right)^{\lambda_i} \quad , \quad I = [1 \ 1 \ldots\ldots 1]$$

$$B = [\alpha_{n+11} \ \alpha_{n+12} \cdots\cdots \alpha_{n+1n}]^T$$

以上を，応答係数γ_ℓの低減のもとで繰り返し適用し，解を収束させるわけである。

3．数値計算例　本文の方法を図に示す簡単なトラス構造物に応用し，その結果を他の手法で解いた結果と比較した。ここで比較した他の手法とは，直接探索法（P）によるSUMT，一次の微分のみを用いる最大傾斜法

（S）によるSUMT，それにSLPである。収束の判定条件は，どの手法でも当然同じであるが，計算の種類が手法によって多少異なるのでそれを説明する。初期値は2種類与えている。SUMTにおいて，応答係数は，$\gamma_1 = 10^5$ であるが，低減の方法は，単純に0.1を乗ずる場合（B）と，0.5と0.2を交互に乗じていく場合（A）の2種類検討した。式（3）のβは，GPにおいては1と2（問題3では，さらに3も検討している。），他の場合は1のみとしている。下表のSUMTのβ，γの欄で，例えば2Bとあるのは，$\beta = 2$，応答係数の低減方法が，上述の（B）によることを示している。これらの計算結果の内，表に示してあるのは，総体積Vが最も少ない結果である。GPの場合は，2番目に少ない結果も示してある。以下に，計算例および計算結果を説明する。

許容応力度は，圧縮部材で$-1000\ \mathrm{kg/cm^2}$，引張部材で$1500\ \mathrm{kg/cm^2}$である。ただし，図-2の部材Mだけは，圧縮で$-2000\ \mathrm{kg/cm^2}$，引張で$3000\ \mathrm{kg/cm^2}$としている。

問題1）　図-1に示すように，3本トラスの先端に荷重が作用する場合で，荷重条件数は2である。表に示すように，Pによる場合に計算時間が多いが，他は計算精度，計算時間ともほとんど差がない。

問題2，3）　図-2に示す10本トラスの例で，荷重条件数は1である。問題2は，応力のみの制約条件の場合で，問題3は，さらに，節点Aの垂直変位を1.5cm（応力のみの制約条件の場合は，2.7cm変位する。）に制限した場合である。結果をみると，Sの計算精度が非常に悪く，また，Pによる計算時間が他よりも多い。また，GPとSLPを比較すると，計算精度はほとんど差がなく，計算時間は，GPの方がほぼ半減している。

問題4）　図-3に示す下路ワーレントラスの例で，荷重条件数は3である。応力の制約条件の他に，節点Aの垂直変位を1.5cm（応力のみの制約条件の場合は，2.5cm変位する。）に制限している。計算結果の傾向は，前問とほとんど同じであるが，GPとSLPの計算時間の差が大きくなっているのが注目される。この問題は，前述の通り荷重条件数が3で，前問と比べてSLPにおけるシンプレックス表が大きくなり，その計算に多くの時間を要したためであり，この傾向は，問題が大きくなるとさらに顕著になると思われる。

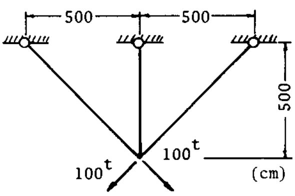

図-1　3本トラス

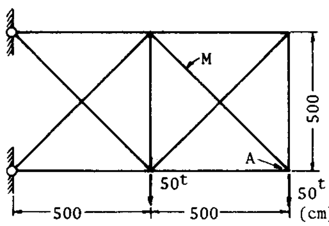

図-2　10本トラス

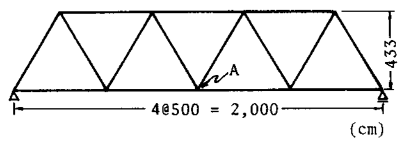

図-3　ワーレントラス

表　各手法による結果の比較

問題		1			2			3			4		
手法		β,γ	V(cm³)	T(sec)	β,γ	V(cm³)	T(sec)	β,γ	V(cm³)	T(sec)	β,γ	V(cm³)	T(sec)
SUMT	GP	2B	88,214	0.038	2B	231,000	0.583	3A	347,563	1.119	1A	452,945	1.512
		2A	88,395	0.123	1A	231,512	0.466	2A	349,479	0.754	2B	453,174	1.171
	P	1B	88,901	0.490	1A	230,132	4.375	1A	350,755	3.516	1A	457,692	10.873
	S	1B	88,249	0.090	1A	332,652	0.289	1A	387,466	0.291	1A	504,295	0.894
SLP			87,957	0.127		233,812	1.060		342,855	1.518		452,868	4.608

4. あとがき　　計算例で示されたように，本文の手法による結果は，他の手法による結果と比べて，計算精度においてほとんど差がなく，計算時間はかなり減少している。さらに，本文では触れていないが，計算機の必要記憶容量もSLPより少なくてすむので，式（1），（2）のような問題の解法としては有効ではないかと思われる。また，他の手法との比較では，DFPによるSUMTも検討の必要があるであろう。

本文の研究は，昭和52年度文部省科学研究費によった。また，本文の計算は，北海道大学大型計算機センターのFacom 230-75を使用した。

参考文献

1) A.B.Templeman,"Optimum Truss Design Using Approximating Functions" , Optimization In Structural Design , Springer-Verlag , 1975.
2) Charles S. Beightler , Don T. Phillips,"Applied Geometric Programming" , John Wiley & Sons , 1976.
3) H.Sugimoto,"BASIC RESEARCH ON AN APPLICATION OF GEOMETRIC PROGRAMMING TO SEQUENTIAL UNCONSTRAINED MINIMIZATION TECHNIQUE" , MEMORIES OF THE MURORAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY , Vol 9 , No 3 ,1978. （12月刊行予定）