

北海道大学工学部 正員 佐藤 浩 一
北海道大学工学部 正員 渡辺 昇
本四連絡橋公団 正員 大島 久

1. ま え が き

吊橋のねじり解析に関する研究は種々なされているが、大部分は重心と剪断中心とが一致する場合を取扱っているようである。本報告では重心と剪断中心とが一致しない場合のねじり解析を文献に基づいた微分方程式から出発し、Laplace 変換を用いて荷重項を含んだ形で剛性マトリックスを誘導した。この剛性マトリックスは(12行×12列)であり、曲げ(4行×4列)に関する剛性マトリックスも含んでおり、またねじり(8行×8列)に関する剛性マトリックスをも含んだ形で求まる。さらに、ケーブルに関する方程式中の撓み曲線およびねじり角曲線の積分値をシンプソン公式を用いずに正確に求める方法で解析を行なった。この方法によれば、三径間連続吊橋は三要素としてねじり解析を行なうことが出来るので小型計算機で十分であり、桁落ちの心配もない。変断面の場合も解析可能である。数値計算例では重心と剪断中心とが一致しない場合($Y_M \neq 0$)とそれを $Y_M = 0$ とした場合との比較、曲げおよびねじりのみの解析と連成解析との比較、本解析法と多分割法との比較を行なった。本解析法は分割数が少ないけれども多分割法より厳密である。

2. 剛性マトリックス(12行×12列)と荷重項の誘導

吊橋の曲げとねじりに関する微分方程式は文献により次の通りである。

$$\begin{aligned} EI v''''(x) - (H_1 + H_2) v''(x) + (H_1 - H_2) e \theta''(x) &= p_1(x) + (H_{p1} + H_{p2}) y'' \dots (1), \\ EC_s \theta''''(x) - GI_T \theta''(x) - (H_1 + H_2) e^2 \theta''(x) + (H_1 - H_2) e v''(x) + EI_y y_H'' w''(x) \\ &= m_T + p_2(x) e_1 - p_1(x) e_2 - (H_{p1} - H_{p2}) e y'' \dots (2), \\ EI_y y_H'' \theta''(x) + EI_y w''(x) &= p_2(x) \dots (3), \quad H_{p1} \frac{L_c}{EcAc} + y'' \int_0^L v_1(x) dx = 0 \dots (4), \quad H_{p2} \frac{L_c}{EcAc} + y'' \int_0^L v_2(x) dx = 0 \dots (5) \end{aligned}$$

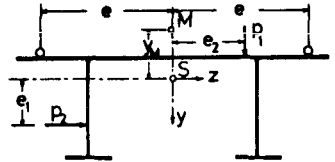


Fig-1

式(1)~(5)を連立させて $v(x)$, $\theta(x)$, $w(x)$ を求めなければならない。まず、最初に、式(1)、(2)で撓みおよびねじり角に関する影響関数 $v_B(x, \xi)$, $\theta_B(x, \xi)$ を求めたつれば、式(4)、(5)から H_{p1} , H_{p2} は次式で求まる。

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} a_{11} H_{p1} + a_{12} H_{p2} &= b_1 \\ a_{21} H_{p1} + a_{22} H_{p2} &= b_2 \end{aligned} \right\} \dots (6) \quad \text{ここで} \quad a_{11} = a_{22} = y'' \int_0^L \{ v_B(x, \xi) + e^2 \theta_B(x, \xi) \} d\xi dx + \frac{L_c}{EcAc} \\ a_{12} = a_{21} = y'' \int_0^L \{ v_B(x, \xi) - e^2 \theta_B(x, \xi) \} d\xi dx \\ b_1 = -y'' \int_0^L \{ p v_B(x, \xi) - e m_T \theta_B(x, \xi) \} d\xi dx, \quad b_2 = -y'' \int_0^L \{ p v_B(x, \xi) + e m_T \theta_B(x, \xi) \} d\xi dx \end{aligned}$$

次に、式(1)、(2)、(3)をLaplace変換し、逆変換し、整理して、積分定数マトリックスで表示すれば

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} U(x) \\ F(x) \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} G(x) \\ H(x) \end{Bmatrix} \{A\} + \begin{Bmatrix} B_1(x) \\ B_2(x) \end{Bmatrix} \dots (7) \quad \text{初期値で表} \quad \begin{Bmatrix} U(x) \\ F(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_1(x) \\ S_2(x) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U(0) \\ F(0) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B_1(x) \\ B_2(x) \end{Bmatrix} \dots (8) \quad \text{式(7)を変形すれば} \end{aligned}$$

$\{F\} = [K] \{U\} + [T] \{P\} \dots (9)$ の形で表示できる。これが12行×12列の剛性マトリックスである。

式(9)の $[K]$ は文献2)に示してある。ここでは $[T] \{P\}$ について表示すれば次の通りである。

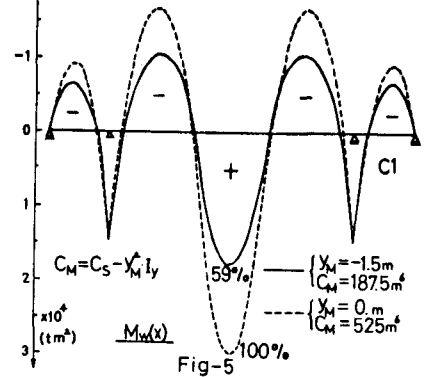
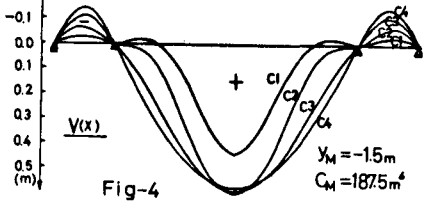
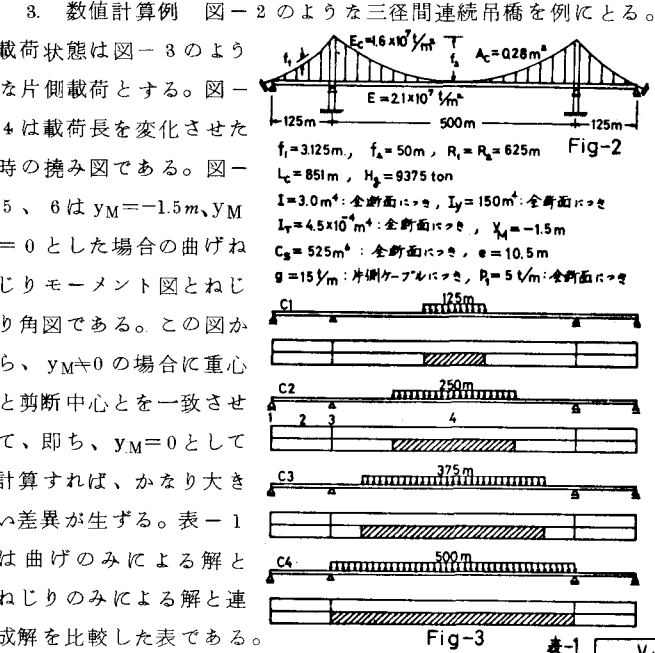
$$\begin{aligned} \{P\} &= \begin{Bmatrix} P_1 \\ p_1 \\ H_2 \\ m_T \\ P_2 \\ p_2 \end{Bmatrix}, \quad [T] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{16} \\ T_{21} & T_{22} & \dots & T_{26} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{61} & T_{62} & \dots & T_{66} \end{bmatrix} \\ \mu^2 &= \frac{H_1 + H_2}{EI}, \quad \mu^2 = \frac{GI_T + (H_1 + H_2)e^2}{ECM}, \quad \varepsilon = \frac{(H_1 - H_2)e}{EI}, \quad \delta = \frac{(H_1 - H_2)e}{ECM}, \\ t &= \mu^2 + \varepsilon^2, \quad C_1 = \mu^2 \varepsilon^2 - \varepsilon \delta, \\ \alpha &= \sqrt{\frac{t}{4} + \sqrt{\frac{C_1}{4}}} + \sqrt{\frac{t}{4} - \sqrt{\frac{C_1}{4}}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{t}{4} + \sqrt{\frac{C_1}{4}}} - \sqrt{\frac{t}{4} - \sqrt{\frac{C_1}{4}}}, \\ &\text{と定める} \\ [T] \{P\} &\dots (10) \quad G\{\alpha, M_p, v_{1\alpha} g(\alpha, l - \xi_1), v_{2\alpha} h(\alpha, l - \xi_1)\} = \frac{M_p}{D_\alpha} \{v_{1\alpha} g(\alpha, l - \xi_1) - v_{2\alpha} h(\alpha, l - \xi_1)\} \\ D_\alpha &= (\alpha^2 - \beta^2)(2 \cosh \alpha l - 2 - \alpha l \sinh \alpha l), \quad M_\alpha = \mu^2 \alpha^2, \quad M_\beta = \mu^2 \beta^2, \quad v_{1\alpha} = \sinh \alpha l, \\ g(\alpha, l - \xi_1) &= \sinh \alpha(l - \xi_1) - \alpha(l - \xi_1), \quad C(\alpha, l - a_1) = \cosh \alpha(l - a_1) - 1 - \frac{1}{2} \alpha^2(l - a_1)^2, \quad v_{2\alpha} = \cosh \alpha l - 1, \\ h(\alpha, l - \xi_1) &= \cosh \alpha(l - \xi_1) - 1, \quad d(\alpha, l - a_1) = \sinh \alpha(l - a_1) - \alpha(l - a_1), \quad v_{2\alpha} = \sinh \alpha l - \alpha l \end{aligned}$$

ここでは、 P_i に関する荷重マトリックス T_{12} のみを表示すれば次のようになる。

$$T_{12} = -G\{\alpha, M_{\alpha}, v_{\alpha}C(\alpha, l-a_1), v_{\alpha}d(\alpha, l-a_1)\} - G\{\beta, M_{\beta}, v_{\beta}C(\beta, l-a_1), v_{\beta}d(\beta, l-a_1)\} \\ + G\{\alpha, M_{\alpha}, v_{\alpha}C(\alpha, l-b_1), v_{\alpha}d(\alpha, l-b_1)\} + G\{\beta, M_{\beta}, v_{\beta}C(\beta, l-b_1), v_{\beta}d(\beta, l-b_1)\} \quad \dots (11)$$

他についても同様な形で表示できる。式(9)によって、多要素に分割し構造全体の剛性マトリックスをつくり
 支点処理して解けば、 $v_B(x, \xi), \theta_B(x, \xi)$ が求まり、式(6)はシンプソン公式を用いて求めることが出来る。

本解析法では式(8)に添字をつけて $\{F_u(x)_i\} = [S_{ij}(x)]\{F_u(0)_j\} + \{B_c(x)_i\} \quad \dots (12)$ のように表示する。
 $i=1 \sim 12, j=1 \sim 12$ 。従って、式(6)は $\int_0^L v(x) dx = \int_0^L F_u(x)_i dx = \int_0^L F_u(0)_j dx = \int_0^L [S_{ij}(x) F_u(0)_j + B_c(x)_i] dx$,
 $\int_0^L \theta(x) dx = \int_0^L F_u(x)_j dx = \int_0^L [S_{ij}(x) F_u(0)_j + B_c(x)_j] dx$ で面積を正確に求めることが出来る。 $F_u(0)_j$ は
 要素の左端の値である。 H_{p1}, H_{p2} を求め、式(1)、(2)、(3)の右辺の荷重項に代入して解析すればよい。



表中の A は曲げのみによる解であり、B はねじりのみによる解であり、C は連成解である。表より連成関係はそれほど強くないことがわかる。

4. あとがき

本解析法は曲げとねじりの連成解析を三要素で解析出来る。しかも多分割法より厳密である。重心と剪断中心とが一致しない場合 $y_M=0$ として解析すれば、ねじり角、ねじり率、ねじりモーメント、曲げねじりモーメントにかなり差異が生ずるが、撓み、撓み角、剪断力、曲げモーメントはほとんど差異が生じない。本計算は北海道大学大型計算機センターの Facom 230-75 を利用した。

表-1

	$V(m)$	$V'(Rad) \times 10^2$	$Q(t)$	$M(tm)$
A	2 -0.0703	1 -0.2043	1 -134.6	3 4037
	4 0.6139	3 0.0810	3 -229.6	4 3712
C	2 -0.0695	1 -0.2022	1 -133.6	3 4046
	4 0.6022	3 0.0790	3 -229.7	4 3649
A/C	2 101.2 %	1 101.0 %	1 100.7 %	3 99.8 %
	4 101.9 %	3 102.5 %	3 100.0 %	4 101.5 %

	$\theta(Rad) \times 10^2$	$\theta'(Rad/m) \times 10^3$	$M_t(tm)$	$M_w(tm^2)$
B	2 -0.4469	1 -0.1336	1 -591.6	3 21367
	4 3.116	3 0.0341	3 -1163	4 12603
C	2 -0.4234	1 -0.1268	1 -568.3	3 20879
	4 2.830	3 0.0308	3 -1146	4 11418
B/C	2 105.6 %	1 105.4 %	1 104.1 %	3 102.3 %
	4 110.1 %	3 110.7 %	3 101.5 %	4 110.4 %

参考文献 1)Hawranek, A., u. Steinhardt, O.: Theorie und Berechnung der Stahlbrücken. Springer 1958. 2)渡辺昇、佐藤浩一、戸田敦: 多径間吊橋のねじりを考慮した剛性マトリックス解析法について。土木学会北海道支部論文報告集 第34号、1978。