

北海道大学 正員 三上 隆
北海道大学 正員 芽村 仁

1. まえがき 石油備蓄などのため、地盤上に円筒形タンクが建設されるようになり、その安全性についての問題が大きく取りあげられるようになってきた。タンクは基礎上の底板および側板より構成されており、比較的軟弱地盤上のタンクにおいては、底板部のたわみ量が大きくなり、板厚に比べて無視できない場合のいわゆる大たわみ問題に対する検討も重要な問題の一つと考えられる。本報告は、Berger の大たわみ理論¹⁾を、弾性基礎上の底板に適用し、液圧下におけるタンク挙動を明らかにしようとするものである。

2. 解析方法 解析にあたって、軸対称変形を仮定し、タンク側板を円筒殻、底板を弾性基礎(Winkler 型基礎)上の円板にモデル化し解析を行う。又、底板部にのみ大たわみ理論を適用するものとする。側板、底板部の基礎方程式およびその解は以下になる。

側板部について

$$\frac{d^4 w_s}{dx^4} + 4k_0^4 w_s = -\delta(L-x)/D_s \quad (1)$$

$$k_0^4 = 3(1-\nu^2)/(R^2 h_s^3), D_s = Eh_s^3/[12(1-\nu^2)]$$

ν = ポアソン比, R = タンク半径, h_s = 側板厚, δ = 液比重

L = 側板高, E = ヤング係数

$$\text{式(1)の解は } w_s = A_1 \cos k_0 x \cdot \cosh k_0 x + A_2 \sin k_0 x \cdot \cosh k_0 x + A_3 \cos k_0 x \cdot \sinh k_0 x + A_4 \sin k_0 x \cdot \sinh k_0 x - R^2 \delta (L-x)/(E h_s)$$

ここに、 $A_1 \sim A_4$ は積分定数

底板部について

板の中央平面の変位を u, w とすると、半径方向ひずみ ϵ_r 、接線方向ひずみ ϵ_θ は次のように表わされる。

$$\epsilon_r = (du/dr) + \frac{1}{2}(dw/dr)^2$$

$$\epsilon_\theta = u/r$$

Berger によるひずみの第1不変量 e_1 と第2不変量 e_2 は次のように与えられる。

$$e_1 = \epsilon_r + \epsilon_\theta = (du/dr) + \frac{1}{2}(dw/dr)^2 + u/r$$

$$e_2 = \epsilon_r \cdot \epsilon_\theta = \left\{ (du/dr) + \frac{1}{2}(dw/dr)^2 \right\} (u/r)$$

地盤反力係数を K と表わし、ひずみエネルギー U を求めると $U = \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[\frac{1}{2} (\nabla^2 w)^2 + \frac{12}{h^2} e_2^2 - 2(1-\nu) \left\{ \frac{12}{h^2} e_2 + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \frac{d^2 w}{dr^2} \right\} + \frac{K}{D} w^2 \right] r dr d\theta$ (5)

$$\text{ここに、} \nabla^2 = (d^2/dr^2) + (1/r)(d/dr),$$

$$D = Eh^3/[12(1-\nu^2)], h = \text{底板厚}$$

外力のなす仕事を W とすると

$$W = \int_0^{2\pi} \int_0^R q w r dr d\theta$$

全ポテンシャルエネルギーは、 $\mathcal{L} = U - W$ と表わさ

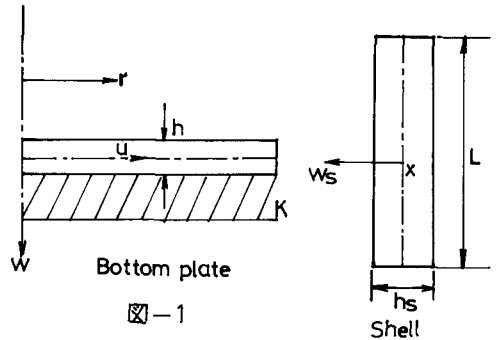


図-1

れ、これの第1変分をとり、極値条件 ($\delta \mathcal{L} = 0$) より Euler の微分方程式がえられる。Berger の仮定にしたがつて、ひずみの第2不変量 e_2 を無視し求めるようにえられる。

$$w \text{ について、} \nabla^4 w - \frac{12}{h^2} e_1 \nabla^2 w + \frac{K}{D} w = \frac{q}{D} \quad (7)$$

$$u \text{ について、} (de_1/dr) = 0 \quad (8)$$

$$\text{式(8)より } e_1 = -\text{一定となるので、} \frac{12}{h^2} e_1 = \alpha^2$$

とおくとき式(7)、(8)は次のようになる。

$$\nabla^4 w - \alpha^2 \nabla^2 w + (K/D) w = (q/D) \quad (7')$$

$$(du/dr) + u/r = -\frac{1}{2}(dw/dr)^2 + h^2 \alpha^2 / 12 \quad (8')$$

式(7')の解は

$$w = B_1^* J_0(\beta_1 r) + B_2^* J_0(\beta_2 r) + q/K \quad (9)$$

ここに、 B_1^*, B_2^* は積分定数であり、 J_0 = 次数0の第1種 Bessel 関数、 β_1, β_2 は次の式より求められる。

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 = -\alpha^2, \beta_1^2 \beta_2^2 = K/D \quad (10)$$

半径方向変位は式(8')より求められ式となる。

$$u = \alpha^2 h^2 r / 24 - B_1^{*2} \beta_1^2 r [J_1^2(\beta_1 r) + J_0^2(\beta_1 r) - 2J_0(\beta_1 r) J_1(\beta_1 r) / (\beta_1 r)] - B_2^{*2} \beta_2^2 r [J_1^2(\beta_2 r) + J_0^2(\beta_2 r) - 2J_0(\beta_2 r) J_1(\beta_2 r) / (\beta_2 r)] / 4 - B_1^* B_2^* \beta_1 \beta_2 \{ \beta_2 J_1(\beta_1 r) J_0(\beta_2 r) - \beta_1 J_0(\beta_1 r) J_1(\beta_2 r) \} / (\beta_1^2 - \beta_2^2) \quad (11)$$

式(10)より、 β_1, β_2 は $\alpha^4 - 4K/D$ の正負により次のあ

$$\begin{aligned} \alpha^4 - 4K/D < 0 \quad \beta_1^2, \beta_2^2 &= \frac{1}{2}(-\alpha^2 \pm i\sqrt{4K/D - \alpha^4}) \\ \alpha^4 - 4K/D > 0 \quad \beta_1^2, \beta_2^2 &= -\frac{1}{2}(\alpha^2 \pm \sqrt{\alpha^4 - 4K/D}) \\ \alpha^4 - 4K/D = 0 \quad \beta_1^2, \beta_2^2 &= -\frac{1}{2}\alpha^2 \quad \text{---(12)} \end{aligned}$$

たとえば、 $\alpha^4 - 4K/D > 0$ のとき、 β_1^* 、 β_2^* は複素定数となるので、これを実数定数におき直す。 β_1 、 β_2 は共役複素数であるので、 $J_0(\beta_1 r)$ 等を実数部と虚数部に分け次のようにおく。

$$\left. \begin{aligned} J_0(\beta_1 r) &= J_0(\beta_1 r)r + i J_0(\beta_1 r)i \\ J_0(\beta_2 r) &= J_0(\beta_1 r)r - i J_0(\beta_1 r)i \\ J_1(\beta_1 r) &= J_1(\beta_1 r)r + i J_1(\beta_1 r)i \\ J_1(\beta_2 r) &= J_1(\beta_1 r)r - i J_1(\beta_1 r)i \end{aligned} \right\} \text{---(13)}$$

ここで、添字 r 、 i は Bessel 関数の実数部、虚数部を表わす。たわみ w 、たわみ角 $\theta = dw/dr$ を実数定数で表わす。次式となる。

$$w = B_1 J_0(\beta_1 r)r + B_2 J_0(\beta_1 r)i + g/K \text{---(14)}$$

$$\begin{aligned} \theta &= -B_1 \{a J_1(\beta_1 r)r - b J_1(\beta_1 r)i\} - B_2 \{a J_1(\beta_1 r)i \\ &\quad + b J_1(\beta_1 r)r\} \text{---(15)} \quad a, b = (1/\sqrt{2}) \cdot \sqrt{K/D \pm \alpha^2/2} \end{aligned}$$

解析手順は、側板部の積分定数 $A_1 \sim A_4$ を側板、底板結合部に生じる曲げモーメント M_0 、せん断力 Q_0 で表わし、底板部のそれを M_0 で表わし、次の条件より α 、 M_0 、 Q_0 を決定する。 $\{u\}_{r=R} = 0$ 、 $\{w\}_{r=0} = 0$ 、 $\{\theta\}_{r=R} = -\{dw/dx\}_{r=0}$

3. 数値計算例 図-2 は $gR^4/Dh = 200$ 、 $R/h = 40$ の(16)ときの底板部のたわみ曲線を示した図である。図中、点線は底板部の面内剛性を無限大と仮定し微小変形理論⁽²⁾により求めた値である。ただし、 $g = \delta L = 1.4 \text{ kg/cm}^2$ ($\delta = 10^3 \text{ kg/cm}$ 、 $L = 1400 \text{ cm}$)、 $h_1 = 1$ ($h = 20 \text{ cm}$) とし、以下の計算でも同様である。図-3 は $K/D R^4 = 500$ での ($gR^4/Dh = 200$, $R/h = 40$) と ($gR^4/Dh = 63$, $R/h = 30$) での底板部のたわみ曲線である。図-2 およびより、地盤反力係数値 K が小さい程、たわみの影響が大きい。図-4 は $gR^4/Dh = 200$ 、 $R/h = 40$ で $K/D R^4 = (500, 1000, 5000)$ の底板部半径方向曲げモーメント M_r を図示したものである。 M_r については、微小変形理論による結果と差は生じなかった。

以上、ここで取り上げた例では、たわみについては微小変形理論との差は、 K 値が小さいとき生じ、曲げモーメントには顕著な差はなかった。

参考文献 1) Berger H.M.: A New Approach to the Analysis of Large Deflections of Plates. J. Appl. Mech. Vol. 22, No. 4, Dec. 1955 2) 三上隆男・村松孝二: 弾性基礎上の円筒形管の液圧及び温度力解析, 第32回土木学会大会論文報告集, 10月, 1977

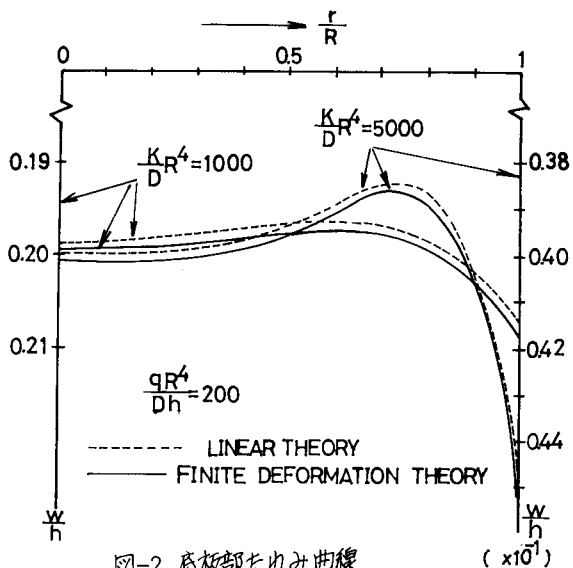


図-2 底板部たわみ曲線

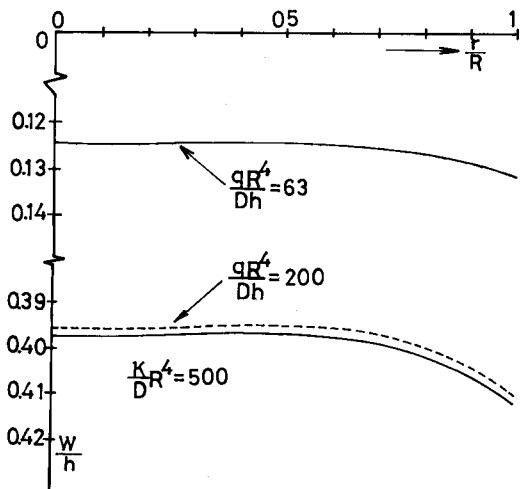


図-3 底板部たわみ曲線

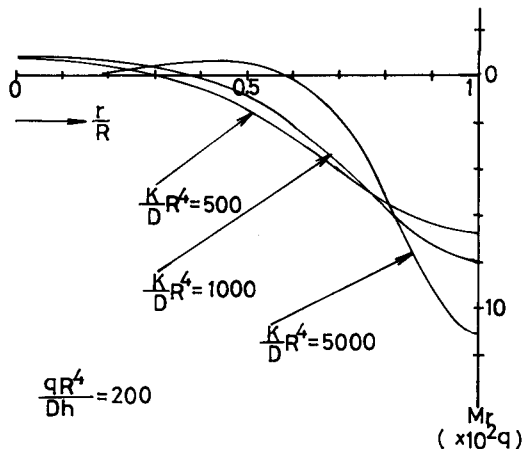


図-4 底板部曲げモーメント曲線 (M_r)