

電々公社 正員 宮川一巳
早稲田大学 正員 平嶋政治
早稲田大学 学生員 井浦雅司

1. まえがき

薄肉曲線桁の動的解析に関しては、断面剛の仮定に基づく一次元棒理論が多く用いられており、断面変形の影響を考慮した研究は比較的少ない。⁽¹⁾⁽²⁾ 薄肉直線桁の振動解析においては、断面変形の影響が無視し得ないことが既に指摘されており、⁽³⁾ 曲線桁に対しても同様のことが予想される。⁽⁴⁾ 本報告では、まず一次元棒理論に基づく振動解析を行ない、曲線桁の固有振動数に及ぼす反り変位と軸の伸縮の影響を調べ、次に、Y. K. Cheung が提唱した Finite Strip Method を用いて、⁽³⁾ 断面変形の影響を調べる。

2. 一次元棒理論

一次元棒理論に基づく振動解析を行なうにあたり、文献(5)の基本方程式における荷重項に慣性項を代入し、振動数方程式を求めた。その際、慣性力に関する断面定数に曲率の影響が入ってくるが、面内及び面外振動を分離するために、一部の断面定数を零とおいている。以下に振動数方程式を示す。

$$\begin{vmatrix} A_{11}(P_{i,vv}^2 - P_i^2) & P_{i,uv}^2 & 0 \\ P_{i,uv}^2 & A_{22}(P_{i,uu}^2 - P_i^2) & 0 \\ 0 & 0 & A_{33}(P_{i,vv}^2 - P_i^2) \\ 0 & 0 & A_{43}(P_{i,vw}^2 - P_i^2) \end{vmatrix} = 0 \quad \dots (1)$$

ここに、 $A_{11} = m_g I_g^*$, $A_{22} = m_g (I_x^* k_i^2 + F_0^*)$,
 $A_{33} = m_g (I_x^* k_i^2 + F_0^*)$, $A_{34} = m_g I_x^* k_i / R_0$,
 $A_{43} = -m_g I_x^* k_i / R_0$, $A_{44} = -m_g (I_x^* / R_0^2 + F_0^*) k_i^2$,
 $k_i = i\pi / L$ ($i=1, 2, \dots$), L = スパン長, m_g : 単位体積あたりの質量, $(\cdot)^*$: 慣性力に関する断面定数,
 $P_{i,vv}^2 = \{ EC_w k_i^4 - (2EC_y / R_0 - GJ_{T0}) k_i^2 + EI_y / R_0^2 \} / A_{11}$,
 $P_{i,uv}^2 = (EC_y - EC_w / R_0) k_i^2 - (EI_y / R_0 + GJ_{T0} / R_0 - EC_y / R_0^2) k_i^2$,
 $P_{i,uu}^2 = \{ EI_y - 2EC_y / R_0 + EC_w / R_0 \} k_i^2 + GJ_{T0} k_i^2 / R_0^2 \} / A_{22}$,
 $P_{i,vv}^2 = (EI_x k_i^2 + EF_0 / R_0^2) / A_{33}$,
 $P_{i,vw}^2 = (EI_x k_i^3 / R_0 + EF_0 k_i / R_0) / A_{34}$,
 $P_{i,vw}^2 = -(EI_x k_i^3 / R_0 + EF_0 k_i / R_0) / A_{43}$,
 $P_{i,ww}^2 = -(EI_x / R_0^2 + EF_0) k_i^2 / A_{44}$,

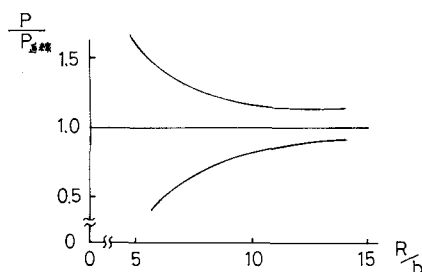


図1. 面外振動

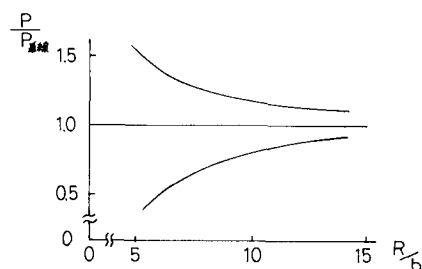


図2. 面内振動

表1 そりの影響

曲率半径(m)	そり考慮 (rad/sec)	そり無視 (rad/sec)
50	15.639 159.003	15.576 159.634
100	17.982 145.543	17.962 145.694
150	18.323 142.542	18.313 142.603
200	18.403 141.334	18.398 141.364
250	18.421 140.703	18.418 140.719

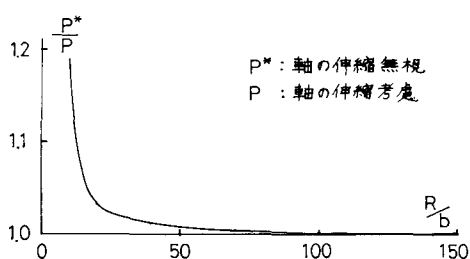


図3. 軸の伸縮の影響

数値計算を行なうにあたり、断面形状・スパン長・境界条件等は文献(4)と同じものを用いた。図1、図2に曲率を変化させた時の面外及び面内振動の固有振動数の変化を直梁のそれとの比で示した。表1では反りの影響を、図3では軸の伸縮の影響を調べた。

3. Finite Strip Method

従来、円筒シェルに関しては Donnell の近似式が多く用いられているが、本報告においては、扇板及び円筒シェルに対し、以下のひずみ-変位の関係式を用いた。

(扇板)

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial r} - \zeta \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2}, \quad \epsilon_\varphi = \frac{\partial v_0}{r \partial \varphi} + \frac{u_0}{r} - \zeta \left(\frac{\partial^2 w_0}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r} \right), \quad \epsilon_{x\varphi} = \frac{\partial u_0}{r \partial \varphi} + \frac{\partial v_0}{\partial r} - \frac{v_0}{r} - \zeta \left(2 \frac{\partial^2 w_0}{r \partial \varphi \partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial w_0}{\partial \varphi} \right), \dots (2)$$

(円筒シェル)

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} - \zeta \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \quad \epsilon_\varphi = \left(1 - \frac{\zeta}{a}\right) \frac{\partial v_0}{a \partial \varphi} - \zeta \frac{\partial^2 w_0}{a^2 \partial \varphi^2} - \frac{w_0}{a}, \quad \epsilon_{x\varphi} = \left(1 - \frac{\zeta}{a}\right) \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{a \partial \varphi} - 2 \zeta \frac{\partial^2 w_0}{a \partial \varphi \partial x}, \dots (3)$$

ここで、 $u_0 = \{(1-\bar{x})u_i + \bar{x}u_s\} \sin \frac{m\pi}{\theta_0} \varphi$, $v_0 = \{(1-\bar{x})v_i + \bar{x}v_s\} \cos \frac{m\pi}{\theta_0} \varphi$,
 $w_0 = \{(1-3\bar{x}^2+2\bar{x}^3)w_i + x(1-2\bar{x}^2+\bar{x}^3)\theta_i + (3\bar{x}^2-2\bar{x}^3)w_s + x(-\bar{x}+\bar{x}^2)\theta_s\} \sin \frac{m\pi}{\theta_0} \varphi$,

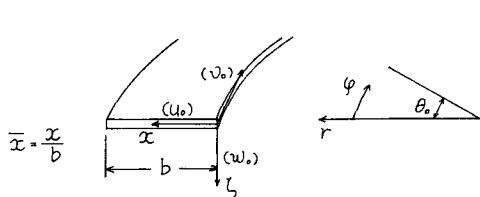


図4. 扇板

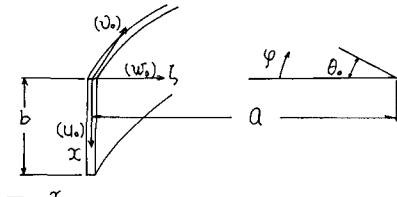


図5. 円筒シェル

なお、応力-ひずみの関係式は次のように表わされる。

$$\sigma_x = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\epsilon_x + \nu \epsilon_\varphi), \quad \sigma_\varphi = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\epsilon_\varphi + \nu \epsilon_x), \quad \sigma_{x\varphi} = G \epsilon_{x\varphi}, \quad \dots (4)$$

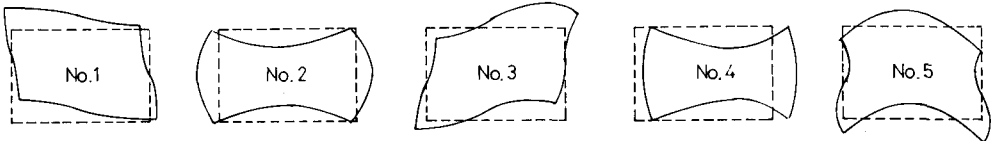
ここで、E: Young 係数, ν : ポアソン比, G: セン断弾性係数。振動問題を取り扱う際に、質量マトリクスは文献(3)と同じものを用い、断面形状・スパン長・境界条件等は一次元構理論の場合に同一のものを用いた。数値計算の結果を表2に示す。但し、表中の周期は長手方向を半波長と仮定したものである。なお、固有値計算においてはパイセクション法を用いた。

表2 曲線桁の固有周期

ΔR	$R=\infty$	$R=6000m$	$R=1200m$	$R=600m$	$R=300m$	$R=200m$	$R=120m$	$R=90m$	$R=60m$
1	0.413	0.415	0.435	0.464	0.530	0.605	0.786	0.968	1.42
2	0.402	0.400	0.397	0.396	0.394	0.394	0.399	0.411	0.454
3	0.397	0.397	0.384	0.363	0.325	0.294	0.245	0.215	0.175
4	0.275	0.275	0.275	0.273	0.266	0.253	0.220	0.193	0.150
5	0.155	0.155	0.155	0.155	0.154	0.152	0.146	0.141	0.130
6	0.136	0.136	0.135	0.134	0.131	0.126	0.112	0.101	0.0811
7	0.0844	0.0844	0.0843	0.0841	0.0834	0.0822	0.0786	0.0748	0.0665
8	0.0388	0.0388	0.0388	0.0389	0.0389	0.0389	0.0387	0.0384	0.0372
9	0.0234	0.0234	0.0235	0.0235	0.0236	0.0236	0.0236	0.0235	0.0232
10	0.00418	0.00418	0.00418	0.00418	0.00418	0.00418	0.00418	0.00418	0.00418

図6に $R=200m$ の時のモード図を示す。

図6. 変形のパターン



4. 参考文献 (1) 小松・中井: 土木学会論文報告集 No.136. (2) 神代・山下・築地: 長崎大学工学部研究報告第4号, 昭48.
 (3) Y. K. Cheung: F.S.M. in Structural Analysis (Pergamon Press). (4) 中村: 土木学会論文報告集 No.223. (5) 深沢: 土木学会論文報告集 No.110.