

北海道大学 ○学生員 野村 健一
北海道大学 正員 能町 純雄
北海道大学 正員 角田 与史雄

1. まえがき

本研究は、横せん断変形と回転慣性を考慮したミンドリン プレート理論による箱形ばりの応力波の速度分散について検討するものである。すなわち面内力は平面応力とし、面外力はミンドリン曲げを用い、隅角部に最小エネルギーの原理を適用させ、変位表示の動的釣合式を得る。この動的釣合式を用いて2軸対称断面を有する箱形ばりの波動解析を試みたものである。

2. 理論解析

図-1のような任意の薄板要素について部材座標を $x-y$ とし、変位成分を u, v, w 、回転成分を $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 、時間 t 、位相速度 c 、波長 λ とし x 方向への進行波を仮定すれば変位成分は振幅のそれと表わすと次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} (u, \theta_1, \theta_2) &= (U, \Theta_1, \Theta_2) \times \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) \\ (v, w, \theta_3) &= (V, W, \Theta_3) \times \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) \end{aligned} \right\} \text{----- (1)}$$

面内変形について平面応力状態とし、面外変形についてミンドリン曲げとすると釣合方程式は、

平面応力状態について

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \text{----- (2)}$$

ミンドリン曲げについて

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - Q_x &= \rho \frac{\partial^3 \theta_1}{\partial x^2 \partial t} \\ \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - Q_y &= \rho \frac{\partial^3 \theta_2}{\partial x^2 \partial t} \\ \frac{\partial^2 Q_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q_y}{\partial y^2} &= \rho h \frac{\partial^4 w}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \text{----- (3)}$$

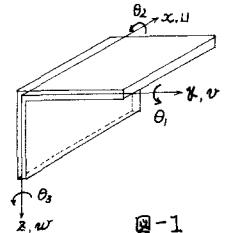


図-1

また応力とひずみの関係は

平面応力状態について

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \text{----- (4)}$$

ミンドリン曲げについて

$$\left. \begin{aligned} M_x &= (2G + \lambda) \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y^2} + \lambda \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2} \\ M_{xy} &= G \frac{h^3}{12} \left(\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2} \right) \\ Q_y &= G' h \left(\theta_2 + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \text{----- (5)}$$

よって(1)、(2)、(4)の関係より面内変形に関して、有限フーリエ変換、および逆変換を施すことにより、要素の端面における断面力と変位の関係は次のように表わされる。

$$[B]\{\delta\} = \{F\} \text{----- (6)}$$

ここに $[B]$ は4行×4列の対称行列であるが各要素が複雑なためここでは割愛する。

$$\{\delta\} = \{u_0, v_0, u_b, v_b\}^T, \quad \{F\} = \{\tau_0, \tau_b, T_0, T_b\}^T$$

同様に(1)、(3)、(5)の関係より面外変形に関して、有限フーリエ変換、および逆変換を施すことにより、要素の端面における断面力と変位の関係は次のように表わされる。

$$[B']\{\delta'\} = \{F'\} \text{----- (7)}$$

ここに $[B']$ は6行×6列の対称行列であるが各要素が複雑なためここでは割愛する。

$$\{\delta'\} = \{\theta_{10}, \theta_{20}, w_0, \theta_{1b}, \theta_{2b}, w_b\}^T, \quad \{F'\} = \{M_{y0}, M_{xy0}, Q_{y0}, M_{y0}, M_{xy0}, Q_{yb}\}^T$$

上式中、サフィックス 0, b はそれぞれ $y=0$ 面, $y=b$ 面を表わすものとする。

フランジ平板とウェブ平板とが結合する隅角部の要素について、 x, y, z 方向の変位を要素断面内で一次分布と仮定し、

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 + u_1 y + u_2 z + u_3 yz \\ v &= v_0 + y z \\ w &= w_0 + y z \end{aligned} \right\} \text{----- (8)}$$

とする。要素のフランジ、ウェブの接続面には図-2 のように見かけの外力が作用しているが、最小エネルギーの原理から次の7本の動的釣合式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} -EA\ddot{u}_0 + \rho A\ddot{u}_0^{(e)} &= T_y^I + T_z^I \\ -EI_x\ddot{u}_1 + \rho A(u_1 + \dot{v}_0) + \rho I_x\ddot{u}_1^{(e)} &= \frac{1}{2}k_1 T_y^I + M_{zx}^I \\ -EI_y\ddot{u}_2 + \rho A(u_2 + \dot{w}_0) + \rho I_y\ddot{u}_2^{(e)} &= \frac{1}{2}k_2 T_z^I + M_{yx}^I \\ -EI_w\ddot{u}_3 + \rho I_w(\ddot{u}_1 + \ddot{u}_2) - \rho I_w\ddot{u}_3^{(e)} &= \frac{1}{2}k_1 M_{zx}^I + \frac{1}{2}k_2 M_{yx}^I \\ -\rho A(u_1 + \dot{v}_0) + \rho A\ddot{v}_0^{(e)} &= S_y^I + Q_z^I \\ -\rho A(u_2 + \dot{w}_0) + \rho A\ddot{w}_0^{(e)} &= Q_y^I + S_z^I \\ -\rho I_x(\ddot{u}_1 + \ddot{u}_2) + \rho I_x\ddot{u}_3^{(e)} &= -M_y^I + M_z^I + \frac{1}{2}k_1 Q_y^I - \frac{1}{2}k_2 Q_z^I \end{aligned} \right\} \text{----- (9)}$$

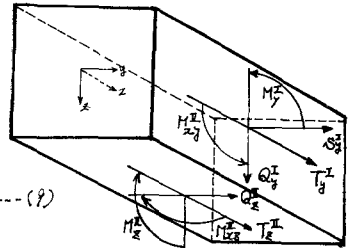


図-2

ここで、 $\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial t}$, $\dot{z} = \frac{\partial z}{\partial t}$, $\dot{u}_3^{(e)} = \frac{\partial u_3^{(e)}}{\partial t}$,

上式において、(9) 式を左辺に代入し、右辺をすべて境界変位で表わし、断面変形の対称、反対称を考慮して整理すると次のような変位表示の動的平衡式が得られる。

$$[K]\{\delta\} = \{0\} \text{----- (10)}$$

ここに $[K]$ は7行×7列の係数行列であるが、各要素が複雑なためここからは省略する。

$$\{\delta\} = \{u_0, u_1, u_2, u_3, v_0, w_0, u_3\}^T$$

よって $\det[K] = 0$ とするものが求める固有値であるが、各要素の中に固有値が重複に入り込んでいるため、くり返し計算によって解を求めた。

3. 数値計算例

$B = H = 50 \text{ cm}$, $t = 1.0 \text{ cm}$, ヤング係数 $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$.

ポアソン比 $\nu = 0.3$, せん断係数 $\kappa = \pi^2/12$ として対称変形の場合について最低次のモードについて求めた。

4. 結果および考察

得られた結果は図-3 のようになった。図-3 からわかるように波長無限大で $C/c_3 = 1.6$ から出発し、 $H/\lambda = 1.0$ 付近に停留点が存在する。 $H/\lambda \leq 2.0$ 付近ではラグランジュ理論より求めたものと一致するが、高周波領域では最終的にはレーリー波に近づくが、その接近の様子はラグランジュ理論に比べて緩慢である。なおこの計算には北大大型計算機センターの FACOM 230-75 を使用した。

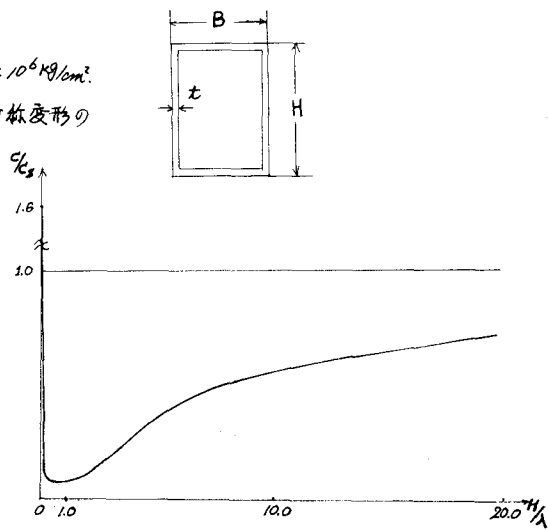


図-3

5. 参考文献

- (1) Mindlin, R.D. "Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates," J. Appl. Mech. Mar 1951.