

東京電機大学 理工学部 正員 青柳 栄
 埼玉大学 工学部 正員 秋山成興
 埼玉大学 工学部 正員 奥村敬亮

I. はじめに 本研究はT型鋼管継手の接合部近傍の応力集中を理論解析するための準備的研究として、大口径の孔を持つ円筒が一樣軸引張を受けた時の応力解析を行なった。円筒と円筒の相角線は平面展開すると、円が微妙につぶれた形状となるが、平均径の円に対する deviation は管径比2/3のT型継手でも4%程度である。(表-1)そこで、まず円孔を有する円筒の解析を行ない、次にこの解を基礎にしてT型継手接合部と同じ形状の孔(T-joint hole)を有する円筒の応力解析をした。

II. 円孔を有する円筒の応力解析 Shallow Shell の方程式

$$\Delta \Delta \Psi - 4\mu^2 i \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} = 0 \quad (1) \quad \mu = \alpha/2\sqrt{RC} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

$$C = h/\sqrt{12(1-\nu^2)}$$

$\Psi = F - iEhcw$ F : Airy's stress function
 w : normal displacement

を解析の出発点とする。 Ψ は複素応力関数と呼ばれる。一樣軸引張のように応力変形が doubly symmetric な解は極座標系に対し次の形で与えられる。

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n + iB_n) H_n^{(1)} [\mu \eta (-i)^{1/2}] \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m (-1)^m \cdot \{ J_{2m-n} [\mu \eta (-i)^{1/2}] + J_{-2m-n} [\mu \eta (-i)^{1/2}] \} \cos 2m\varphi \quad (2)$$

ただし、 $\eta = r/\alpha$ $\epsilon_m = \begin{cases} 1/2 & (m=0) \\ 1 & (m \geq 1) \end{cases}$ A_n, B_n ; 未定定数

(2) 中の Bessel, Hankel を Kelvin 関数で置きかえて整理すれば、

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (A_n + iB_n) (\Gamma^{nm} + i\Lambda^{nm}) \cos 2m\varphi \quad (3) \quad \text{となり、} \Gamma^{nm}, \Lambda^{nm} \text{ は次式で与えられる。} \mu^* = 1/2\sqrt{RC}$$

$$\Gamma^{nm} = (-1)^m \epsilon_m \frac{2}{\pi} \{ \text{kei}_n(\mu^* r) \{ \text{ber}_{2m-n}(\mu^* r) + \text{ber}_{-2m-n}(\mu^* r) \} + \text{ker}_n(\mu^* r) \{ \text{bei}_{2m-n}(\mu^* r) + \text{bei}_{-2m-n}(\mu^* r) \} \} \quad (4)$$

$$\Lambda^{nm} = (-1)^m \epsilon_m \frac{2}{\pi} \{ \text{kei}_n(\mu^* r) \{ \text{bei}_{2m-n}(\mu^* r) + \text{bei}_{-2m-n}(\mu^* r) \} - \text{ker}_n(\mu^* r) \{ \text{ber}_{2m-n}(\mu^* r) + \text{ber}_{-2m-n}(\mu^* r) \} \}$$

(3) より、断面力、モーメントの表示式が得られる。境界条件に用いるもののみを示す次のようになる。

$$Q_{rr} = \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \text{Re} \Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{r} \Gamma^{nm} + \frac{1}{r^2} \Gamma_{\varphi\varphi}^{nm} \right) A_n - \left(\frac{1}{r} \Lambda^{nm} + \frac{1}{r^2} \Lambda_{\varphi\varphi}^{nm} \right) B_n \right\} \cos 2m\varphi$$

$$Q_{r\varphi} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \text{Re} \Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{r} \Gamma_{\varphi}^{nm} - \frac{1}{r^2} \Gamma_{\varphi r}^{nm} \right) A_n - \left(\frac{1}{r} \Lambda_{\varphi}^{nm} - \frac{1}{r^2} \Lambda_{\varphi r}^{nm} \right) B_n \right\} \sin 2m\varphi$$

$$M_{rr} = D \left(\chi_{rr} + \nu \chi_{\varphi\varphi} \right) = C \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \right\} \text{Im} \Psi$$

$$= C \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \left[\Lambda_{rr}^{nm} + \nu \left(\frac{1}{r} \Lambda_{\varphi}^{nm} + \frac{1}{r^2} \Lambda_{\varphi\varphi}^{nm} \right) \right] A_n + \left[\Gamma_{rr}^{nm} + \nu \left(\frac{1}{r} \Gamma_{\varphi}^{nm} + \frac{1}{r^2} \Gamma_{\varphi\varphi}^{nm} \right) \right] B_n \right\} \cos 2m\varphi$$

$$Q_{rn} = -D \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 w + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\varphi}}{\partial \varphi} = C \left\{ \left(\frac{\partial^3}{\partial r^3} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3}{\partial r \partial \varphi^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r \partial^2} \right) + (1-\nu) \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^3}{\partial r \partial \varphi^2} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \right\} \text{Im} \Psi$$

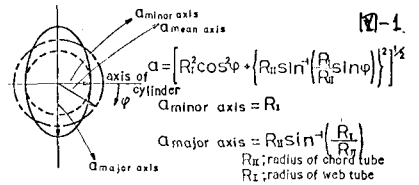
$$= C \left[\left(\Lambda_{rrr}^{nm} - \frac{1}{r^2} \Lambda_{rr}^{nm} + \frac{1}{r} \Lambda_{r\varphi}^{nm} - \frac{2}{r^2} \Lambda_{\varphi\varphi}^{nm} + \frac{1}{r^2} \Lambda_{\varphi r}^{nm} - \frac{1}{r^3} \Lambda_{\varphi\varphi}^{nm} + \frac{1-\nu}{r^2} \Lambda_{\varphi\varphi}^{nm} \right) A_n + \right. \\ \left. + \left(\Gamma_{rrr}^{nm} - \frac{1}{r^2} \Gamma_{rr}^{nm} + \frac{1}{r} \Gamma_{r\varphi}^{nm} - \frac{2}{r^2} \Gamma_{\varphi\varphi}^{nm} + \frac{1}{r^2} \Gamma_{\varphi r}^{nm} - \frac{1-\nu}{r^3} \Gamma_{\varphi\varphi}^{nm} + \frac{1-\nu}{r^2} \Gamma_{\varphi\varphi}^{nm} \right) B_n \right] \cos 2m\varphi$$

(5) の中で、 $\Gamma^{nm}, \Lambda^{nm}$ の subscript r は(4)で r で微分することを意味し、subscript φ はたとえば、 $\Gamma_{\varphi\varphi}^{nm} = (-2m) \Gamma^{nm}$, $\Lambda_{\varphi\varphi}^{nm} = -4m^2 \Lambda^{nm}$ などを意味する。次に境界条件としては、Unperforated

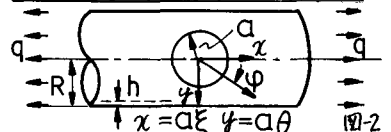
Cylinder (孔のないふつうの円筒) の一樣軸引張を基本応力状態とせば、これは

$$\bar{Q}_{rr} = \frac{1}{2} q h (1 + \cos 2\varphi), \bar{Q}_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2} q h (1 - \cos 2\varphi), \bar{Q}_{r\varphi} = -\frac{1}{2} q h \sin 2\varphi, \bar{M}_{rr} = \bar{M}_{\varphi\varphi} = \bar{M}_{r\varphi} = \bar{Q}_m = \bar{Q}_{\varphi n} = 0 \quad (6)$$

と表わされる。円孔をもつ円筒の境界条件は、円孔の edge で、stress-free の条件を満足させればよい。つまり、 $r = \alpha$ で $Q_{rr} + \bar{Q}_{rr} = 0$, $Q_{r\varphi} + \bar{Q}_{r\varphi} = 0$, $M_{rr} = 0$, $Q_{rn} = 0$ (7) である。(5), (6) を(7)に代入して、fourier 係数の比較をすれば、 A_n, B_n を決定するための連立方程式が得られる。 n, m は連立方程式の係数行



R2 = 30.03 cm				
Minor (cm)	E = R2/R1	Minor (cm)	Mean (cm)	平均径のズレ (%)
3.00	1/10	3.0005	3.00025	0.0083%
10.00	1/3	10.1947	10.097	0.97%
20.00	2/3	21.8869	20.9669	4.83%



列が正方となるようにadjustして打ち切り, Gauss-Jordan 法で解いた。たとえば, 円孔の接線方向面内力 $Q_{\varphi\varphi} = Q_{\varphi\varphi} = f_0 + f_1 \cos 2\varphi + f_2 \cos 4\varphi + f_3 \cos 6\varphi + f_4 \cos 8\varphi + f_5 \cos 10\varphi + \dots$ と表示した時の係数 $f_i (i=0 \sim 5)$ を表-2に示す。($a/R=2/3$ の場合) a/R が小さい場合には,

円孔を持つ無限板の一方一様引張の応力状態 (Kirsch の解) に相当してくること, 及び $a/R=1/5$ の場合の実験値と良く一致すること等により, この解の有効性をチェックした。図-3には $a/R=2/3$ の場合の, 円孔の接線方向の膜応力, 曲げ応力の分布を応力集中で示す ($r=a$ の値)

		$a/R=2/3$		表-2	
(I)	$m=3$ $n=6$	(II)	$m=4$ $n=8$	(III)	$m=5$ $n=10$
f_0	0.72534055		0.72532672		0.72532690
f_1	-2.46753216		-2.46778107		-2.46778202
f_2	1.74345684		1.74304390		1.74304962
f_3	-0.11253041		-0.11304790		-0.11302710
f_4			0.00378621		0.00412713
f_5					0.00008873

III. T-joint holeを有する円筒の応力解析 T-joint hole

に対する複素応力関数として, 管径比 $\varepsilon = R_1/R_2$ を微小パラメータに選り, 次の形を仮定する。

$$\Psi = \Psi^{(0)} + \varepsilon \Psi^{(1)} + \varepsilon^2 \Psi^{(2)} + \varepsilon^3 \Psi^{(3)} + \dots + \varepsilon^m \Psi^{(m)} \quad (8)$$

Ψ は II で得られた複素応力関数であるが, ここでは μ は const.

ではなく $\mu = a/2\sqrt{RC} = \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{2} \frac{r_0}{R_1 h} [1 + \varepsilon_{ecc} (2 \sin^4 \varphi - 1)]$ と表わされる。ただし, r_0 : 平均径 $\varepsilon_{ecc} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2}$ 今, $\varepsilon_0 = \varepsilon_{ecc} (2 \sin^4 \varphi - 1)$ $\beta = \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{2} \frac{r_0}{R_1 h}$ とおけば, $J_n[\mu \eta e^{3\pi i/4}] = J_n[\beta(1 + \varepsilon_0) e^{3\pi i/4}]$ であるから, 加法定理を用いてこれを ε_0 のべき乗に展開し, (8) の $\Psi^{(i)}$ に代入して整理すれば $\Psi^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \Psi_n^{(i)}$ と表わし得る。しかるに, $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_{ecc} < \frac{1}{12} \varepsilon^2$ であるから $\varepsilon=2/3$ でも $\varepsilon_0 \approx 0.04$ 程度である。そこで,

$$\Psi^{(i)} = \Psi_0^{(i)} \text{ とおけば, (8) は } \Psi = \sum \varepsilon^i \Psi_0^{(i)} = \Psi_0^{(0)} + \varepsilon \Psi_0^{(1)} + \varepsilon^2 \Psi_0^{(2)} + \dots \quad (9)$$

となる。そこで, $\mu = r_0/2\sqrt{RC}$ $\mu \eta = \beta$

$$\Psi_0^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (A_n^{(i)} + i B_n^{(i)}) (-1)^m \varepsilon_m H_n^{(i)} (\mu \eta e^{3\pi i/4}) \{ J_{2m-n}(\mu \eta e^{3\pi i/4}) + J_{-2m-n}(\mu \eta e^{3\pi i/4}) \} \cos 2m\varphi \quad (10)$$

こうして T-joint hole に対する複素応力関数 Ψ が得られたので次のような断面力, $E-\chi$ の表示式

$$Q_{rr} = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (F_{rra}^{(i)} A_n^{(i)} + F_{rrb}^{(i)} B_n^{(i)}) \cos 2m\varphi \quad Q_{\varphi\varphi} = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (F_{\varphi\varphi a}^{(i)} A_n^{(i)} + F_{\varphi\varphi b}^{(i)} B_n^{(i)}) \sin 2m\varphi \quad (11)$$

$$M_{rr} = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (W_{rra}^{(i)} A_n^{(i)} + W_{rrb}^{(i)} B_n^{(i)}) \cos 2m\varphi \quad Q_{\varphi r} = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (K_{\varphi r a}^{(i)} A_n^{(i)} + K_{\varphi r b}^{(i)} B_n^{(i)}) \cos 2m\varphi$$

が導かれる。F, W, K は各々, (6) の A_n B_n の係数である。(11) はさらに T-joint hole の境界線の垂直方向, 接線

方向にわたる局所座標系での表示式に変換される。(図-4) により,

$$Q_{\varphi\varphi} = Q_{rr} \cos^2 \Phi + Q_{\varphi\varphi} \sin^2 \Phi - 2Q_{\varphi r} \sin \Phi \cos \Phi$$

$$Q_{\varphi r} = Q_{\varphi\varphi} (\cos^2 \Phi - \sin^2 \Phi) + (Q_{rr} - Q_{\varphi\varphi}) \sin \Phi \cos \Phi$$

$$M_{\varphi\varphi} = M_{rr} \cos^2 \Phi + M_{\varphi\varphi} \sin^2 \Phi + 2M_{\varphi r} \sin \Phi \cos \Phi \quad (12)$$

$$Q_{\varphi n} = Q_{rn} \cos \Phi - Q_{\varphi n} \sin \Phi$$

(12) で $\cos \Phi$, $\sin \Phi$ にも ε が入っているが, 終局的に

$$Q_{\varphi\varphi} = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Q_{\varphi\varphi}^{(i)} \quad Q_{\varphi r} = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Q_{\varphi r}^{(i)} \quad M_{\varphi\varphi} = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i M_{\varphi\varphi}^{(i)} \quad Q_{\varphi n} = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Q_{\varphi n}^{(i)}$$

の形に表し得る。(6) も同様に局所座標系に変換する。境界条件は

$$r=r_0 \quad Q_{\varphi\varphi} + Q_{\varphi r} = 0 \quad Q_{\varphi r} + Q_{rr} = 0 \quad M_{\varphi\varphi} = 0 \quad Q_{\varphi n} = 0 \quad (13)$$

である。(13) でまず ε の同べきを等置し, 次に fourier 係数の

比較をすれば, $A_n^{(i)}$ $B_n^{(i)}$ を決定するための連立方程式が得られる。計算では ε までは $n=8$ $m=4$ で打ち切った。

図-5は T-joint hole edge 上の接線方向応力集中係数を示す (実験)。点線は短径を半径とする円孔の解である。

IV. まとめ。大口径の孔の場合, 平均径と円筒の半径の比が大きいと, 応力集中率がかなり高められることが定量的に明らかになった。詳しい解析結果は当分の発表に譲る。本解析を管束応力状態とし, 枝管を接合させて,

接合線上での応力変形連続条件を与えれば, T型鋼管継手の応力解析が可能である。

STRESS DISTRIBUTION UNDER UNIFORM TENSION
CIRCUMFERENTIAL MEMBRANE AND BENDING STRESS

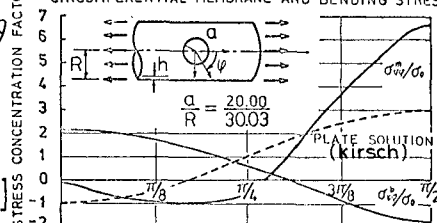


図-3

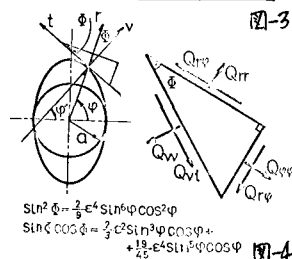


図-4

CIRCUMFERENTIAL MEMBRANE AND BENDING STRESS

$$(R_1/R_2 = a_{\text{minor}}/R_2 = 1/2)$$

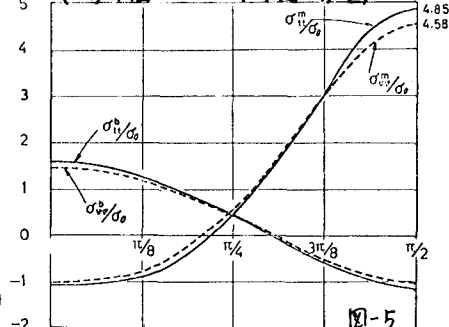


図-5