

1. まえがき

薄肉円筒殻の応力解析法は数多く提案されている。Eligge, Novozhilov, Donnellの基礎方程式をもとに8階あるいは4階の偏微分方程式に帰着させ、2重Fourier級数展開または一方向のみFourier級数展開して解く方法が広く知られている。一方向のみFourier級数展開する場合、軸方向と円周方向があるが、2重Fourier級数展開も含めて軸方向級数展開は長くなった時の解の発散や精度低下が知られており、境界条件としては両端単純支持以外解が求めにくい。また円周方向級数展開では境界条件の制約が緩められる反面、軸方向座標のみに関する常微分方程式の同次解と特解を考え合わせて解く必要が生じる。有限要素法による解法はGraftonらの研究以後、Percyらによる非対称荷重への拡張、Gouldらによる要素内変位関数の次数増加による精度向上、曲線要素による形状の適合性の向上などが短期間に確立された。しかし有限要素法には、境界条件、荷重条件の選択の自由、解法の簡明さという利点がある一方、応力集中箇所の要素細分割の必要性、長くなった場合の応力値の精度低下、大次元マトリックス演算の必要性など問題も多い。

そこで、本報告では解析的方法の利点、即ち集中荷重点近傍の応力集中に対する追従性の良さ、計算量が少ないなどの利点と、有限要素法の上記利点を兼ね備えた薄肉円筒殻の応力解析法を次のように提案する。数値計算を数多く行な、た結果、最近重要になってきた大口径の長大管路などに有効に利用できることが明らかになった。

2. 薄肉円筒殻の弾性変形に関する基礎方程式から正規形常微分方程式を誘導する過程

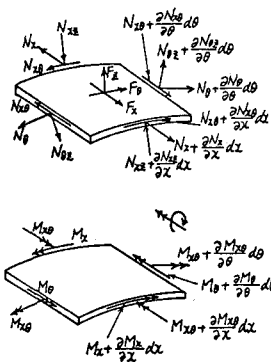


図-1 円筒殻の微小要素に作用する力と座標系

円筒殻の微小要素に作用する単位幅当り合力、曲げモーメントおよび座標を図-1のようにとれば、平衡方程式と合力、曲げモーメント—変位関係式は次の通りである。

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} + F_x = 0 \quad \text{----- (1)} \quad N_{\theta x} = G' \left\{ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \right\} \quad \text{----- (2)}$$

$$\frac{\partial N_{\theta x}}{\partial x} + \frac{\partial N_{\theta \theta}}{\partial \theta} + \frac{N_{\theta z}}{r} + F_{\theta} = 0 \quad \text{----- (3)} \quad M_x = -D \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right\} \quad \text{----- (4)}$$

$$\frac{\partial N_{\theta x}}{\partial x} + \frac{\partial N_{\theta \theta}}{\partial \theta} - \frac{N_{\theta}}{r} + F_z = 0 \quad \text{----- (5)} \quad M_{\theta} = -D \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\} \quad \text{----- (6)}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{\theta x}}{\partial \theta} - N_{xz} = 0 \quad \text{----- (7)} \quad M_{x\theta} = M_{\theta x} = D(1-\nu) \left\{ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right\} \quad \text{----- (8)}$$

$$\frac{\partial M_{\theta x}}{\partial x} + \frac{\partial M_{\theta \theta}}{\partial \theta} - N_{\theta z} = 0 \quad \text{----- (9)} \quad Q_z = N_{xz} + \frac{\partial M_{\theta x}}{\partial \theta} \quad \text{----- (10)}$$

$$N_x = K \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{r} \right) \right\} \quad \text{----- (11)} \quad Q_{\theta} = N_{\theta x} + \frac{M_{x\theta}}{r} \quad \text{----- (12)}$$

$$N_{\theta} = K \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{r} \right) + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right\} \quad \text{----- (13)} \quad F_z = \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{----- (14)}$$

ここで、 r は断面の平均半径、 t は板厚、 u, v, w はそれぞれ x, θ, z 軸方向変位、 E はヤング率、 ν はポアソン比、 K は $E t^3 / (1-\nu^2)$ 、 $G' = E t^3 / 2(1+\nu)$ 、 D は $E t^3 / 12(1-\nu^2)$ 、 Q_x, Q_{θ} は等価せん断力とする。次に、 $u, w, N_x, N_{\theta}, N_{xz}, M_x, M_{\theta}, Q_x, Q_{\theta}, F_x, F_z$ を $\cos$ で、 $v, N_{\theta x}, N_{\theta z}, M_{x\theta}, Q_{\theta}, F_{\theta}$ を $\sin$ で円周方向Fourier展開し、波数 n に対するFourier係数から成るベクトル $Y^{(n)}(x)$ と $Y^{(n)}(x) = [w^{(n)}, \delta_x^{(n)}, u^{(n)}, v^{(n)}, N_x^{(n)}, Q_x^{(n)}, Q_{\theta}^{(n)}, M_x^{(n)}]^T$ とすれば、求める正規形常微分方程式は $\frac{dY^{(n)}}{dx} = A^{(n)} Y^{(n)} + P^{(n)}$ となる。

$$A^{(n)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\pi^2 \nu}{r^2} & 0 & 0 & \frac{\pi \nu}{r^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{D} \\ -\frac{\nu}{r} & 0 & 0 & -\frac{\pi \nu}{r} & \frac{1}{K} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\pi(1-\nu)D}{r^2 G'} & \frac{\nu}{r} & 0 & 0 & \frac{1}{G'} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi(1-\nu)D}{r^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\nu}{r} & 0 & 0 \\ \frac{(1-\nu) \left(\frac{\pi K}{r^2} + \frac{\pi^2 D}{r^2} \right)}{0} & 0 & 0 & \frac{(1-\nu) \left(\frac{\pi K}{r^2} + \frac{\pi^2 D}{r^2} \right)}{0} & \frac{\pi \nu}{r} & 0 & 0 & \frac{\pi \nu}{r^2} \\ \frac{(1-\nu) \left(\frac{\pi K}{r^2} + \frac{\pi^2 D}{r^2} \right)}{0} & 0 & 0 & \frac{(1-\nu) \left(\frac{\pi K}{r^2} + \frac{\pi^2 D}{r^2} \right)}{0} & \frac{\nu}{r} & 0 & 0 & \frac{\pi \nu}{r^2} \\ 0 & -\frac{2\pi^2(1-\nu)D}{r^2} & -\frac{2\pi^2(1-\nu)D}{r^2} & 0 & 0 & -\frac{2\pi(1-\nu)D}{r^2 G'} & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad P^{(n)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -F_x^{(n)} \\ -F_{\theta}^{(n)} \\ -F_z^{(n)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. 数値計算法

2で示した正規形の式は係数マトリックスが定数であるから末尾の文献に述べた通り $A^{(0)}$ の固有値解析を行えば解が求められる。 $A^{(0)} = R^{(0)} D^{(0)} R^{(0)T}$, $A^{(0)} = R^{(0)} D^{(0)} R^{(0)T}$ の場合のみ示すが、他は通常の方法で容易に数値計算で求める。

$$\lambda_i^{(0)} = \pm \sqrt{\frac{3(1-\nu^2)}{E} r} \pm j \sqrt{\frac{3(1-\nu^2)}{E} r} \quad (\text{値 } i=1,2,3,4)$$

$$\lambda_i^{(0)} = \pm \sqrt{\frac{1}{r^2} + \frac{(2+\nu)^2}{E} r} \pm j \sqrt{\frac{3(1-\nu^2)}{E} r} \quad (j=\sqrt{-1})$$

$$D^{(0)} = \begin{Bmatrix} -C_1 & & & \\ -C_2 & & & \\ r C_3 + (2+\nu) r^2 C_4 & & & \\ C_1 - \nu r^2 C_3 & & & \\ (1-\nu^2) r K C_3 + A_1 & & & \\ -(1-\nu^2) r^2 K C_3 + A_2 & & & \\ (1-\nu^2) D C_4 + A_3 & & & \\ (1-\nu^2) D C_3 + A_4 & & & \end{Bmatrix}$$

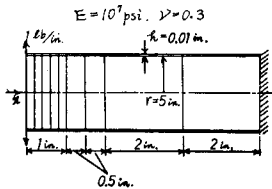
ここで $A_1 = 1$, $A_2 = \frac{\nu r}{2+\nu}$, $A_3 = \frac{(1+2\nu-\nu^2)r^2}{12(1-\nu^2)r^2 - \nu(2+\nu)r}$, $A_4 = \frac{(1-\nu)r^2 \lambda_1^{(0)} \lambda_2^{(0)}}{6(2+\nu)r}$, $A_5 = \frac{(1+2\nu-\nu^2)r^2 \lambda_1^{(0)} \lambda_2^{(0)}}{12(1-\nu^2)r^2 - \nu(2+\nu)r}$, $A_6 = \frac{(1+2\nu-\nu^2)r^2 \lambda_1^{(0)} \lambda_2^{(0)}}{12(1-\nu^2)r^2 - \nu(2+\nu)r}$, $b_1 = \frac{A_5}{D}$, $b_2 = \frac{-A_6}{\nu r^2 G}$, $b_3 = \frac{A_1}{(2+\nu) r^2 K} - \frac{A_4}{(2+\nu) r^2 D}$

$$C_1 = \frac{b_1}{\lambda_1^{(0)2}} + \frac{b_2}{\lambda_2^{(0)2}} + \frac{b_3}{\lambda_3^{(0)2}}, \quad C_2 = \frac{b_1}{\lambda_1^{(0)}} + \frac{b_2}{\lambda_2^{(0)}} + \frac{b_3}{\lambda_3^{(0)}}$$

$$C_3 = \frac{b_2}{\lambda_2^{(0)}} + \frac{b_3}{\lambda_3^{(0)}}, \quad C_4 = \frac{b_3}{\lambda_3^{(0)}}$$

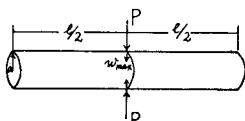
4. 数値計算例

図-2は左端自由、右端固定で、左端に半径方向一様荷重が載荷されている場合である。



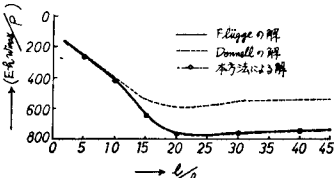
a) 計算モデルとGraftonからの有限要素分割、本解法では全体で要素

図-3は両端単純支持で、中央に上下から集中荷重が作用している場合の半径方向最大変位を計算したものである。



a) Yuanらの計算モデル、両端単純支持

また、図-4では、両端単純支持で中央部に半径方向分布荷重が作用している。いずれの場合も、他の理論値、他の計算法による値とよく一致している。



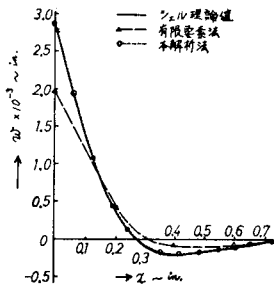
b) スパン長と半径方向最大変位の関係

図-3 Yuanらの計算結果との比較

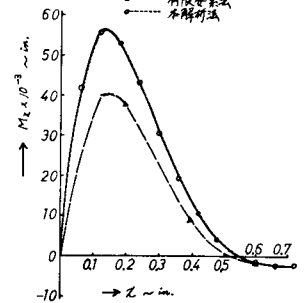
なお、本解法では、8元のマトリックス計算を行なったのみである。

参考文献 中村孝治：管路、薄肉はりなどの線形常微分方程式の一般数値解析法、林学論文報告集、No.271

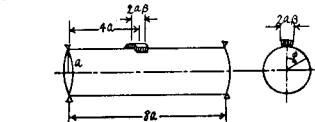
$$D^{(0)} = \begin{Bmatrix} \lambda_1^{(0)} & & & & & & & \\ & \lambda_2^{(0)} & & & & & & \\ & & \lambda_3^{(0)} & & & & & \\ & & & \lambda_4^{(0)} & & & & \\ & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & 0 & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \lambda_1^{(0)} \\ & & & & & & & \lambda_2^{(0)} \\ & & & & & & & \lambda_3^{(0)} \\ & & & & & & & \lambda_4^{(0)} \\ & & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & 0 & & 1 \\ & & & & & & & & 0 & & 1 \\ & & & & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & & & & 0 \end{Bmatrix}, \quad R^{(0)} = \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -\nu r & 0 & 0 \\ \lambda_1^{(0)} & \lambda_2^{(0)} & \lambda_3^{(0)} & \lambda_4^{(0)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{r \lambda_1^{(0)}} & \frac{\nu}{r \lambda_2^{(0)}} & \frac{\nu}{r \lambda_3^{(0)}} & \frac{\nu}{r \lambda_4^{(0)}} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\nu) K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \\ -D \lambda_1^{(0)} & -D \lambda_2^{(0)} & -D \lambda_3^{(0)} & -D \lambda_4^{(0)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -D \lambda_1^{(0)} & -D \lambda_2^{(0)} & -D \lambda_3^{(0)} & -D \lambda_4^{(0)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & r & 0 & (2+\nu) r \\ & & & & 1 & 0 & -\nu r^2 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & (1-\nu) r K & 0 \\ & & & & 0 & -\frac{r^2}{36} G & 0 & (1-\nu) r K \\ & & & & 0 & -\frac{r^2}{18} G & 0 & (1-\nu) r D \\ & & & & 0 & 0 & (1-\nu) D & 0 \end{Bmatrix}$$



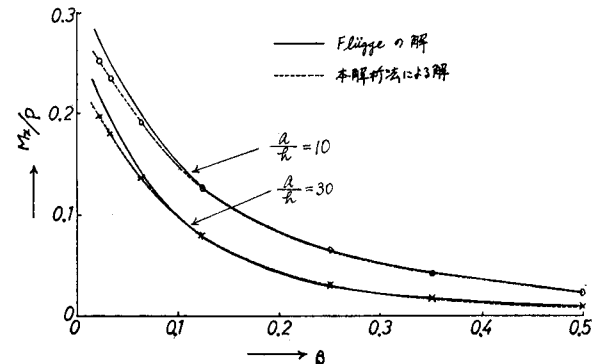
b) 半径方向変位 w



c) 曲げモーメント M_x



a) 計算モデル、両端単純支持



b) 分布荷重領域と最大曲げモーメント M_x の関係

図-4 鶴戸ロ、加納の計算結果との比較