I-55　# Helicoidal Shellの基本方程式の誘導

早稲田大学　学生員　○井浦雅司
早稲田大学　正　員　　平嶋政治

1. まえがき

回転シェルの回転方向に，一定の高さの変化を与えると，らせん桁の構成部材として用いられている，Helicoidal Shellが得られる。Helicoidal Shellに関する研究は比較的少なく，特別な場合として回転軸に直交する直線によって作られるRight Helicoidal Shellの研究が，Reissner[1]，西村[2]らによって行なわれている。本報告においては，薄肉らせん桁の構成部材であるHelicoidal Shellの基礎方程式をテンソル解析を用いて導く。なお，表示方法はテンソル解析の規約に従い，特にことわらない限り，ラテン文字の添字は1, 2, 3，ギリシャ文字のそれは1, 2をとるものとする。

2. 変位前の幾何量

Helicoidal SHellの中央面上の位置ベクトルは，空間固定直交座標系の単位基底ベクトル$\mathbf{i}_m$及び*parameter* α^{κ}を用いて次のように表わされる。[3]

$$\mathbf{r} = \alpha^2\cos\alpha^1\,\mathbf{i}_1 + \alpha^2\sin\alpha^1\,\mathbf{i}_2 + \{f(\alpha^2) + a\alpha^1\}\,\mathbf{i}_3 \qquad (1)$$

ここで，aは定数である。さらに実際の構成部材の大部分が線織面よりなっていることから，$f(\alpha^2) = b\alpha^2 + c$とおく。ただし$b, c$は定数である。中央面上の共変反変基底ベクトルをそれぞれ$\mathbf{a}_m$, $\mathbf{a}^m$とおき，第一基本計量テンソルを$a_{\alpha\beta}$, $a^{\alpha\beta}$とおくと次のようになる。

$$a_{11} = a^2 + (\alpha^2)^2,\quad a_{12} = a_{21} = ab,\quad a_{22} = (1 + b^2),$$
$$a^{11} = a_{22}/F^2,\quad a^{12} = a^{21} = -a_{12}/F^2,\quad a^{22} = a_{11}/F^2,$$
$$|a_{ij}| = F^2 \qquad (2\text{-}a\sim g)$$

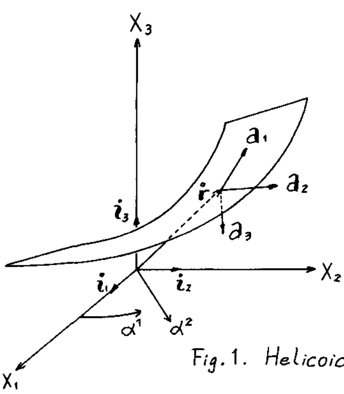

Fig. 1. Helicoidal Shell

さらにChristoffell記号及び第二基本計量テンソルは以下のように与えられる。

$$\begin{Bmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^2_{11} \\ \Gamma^1_{21} & \Gamma^2_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{ab\alpha^2}{F^2}, & -\dfrac{\alpha^2\{a^2+(\alpha^2)^2\}}{F^2} \\ \dfrac{\alpha^2(1+b^2)}{F^2}, & -\dfrac{ab\alpha^2}{F^2} \end{Bmatrix} \cdots (3\text{-}a)$$

$$\begin{Bmatrix} \Gamma^1_{12} & \Gamma^2_{12} \\ \Gamma^1_{22} & \Gamma^2_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\alpha^2(1+b^2)}{F^2}, & -\dfrac{ab\alpha^2}{F^2} \\ 0 & ; \; 0 \end{Bmatrix} \cdots (3\text{-}b)$$

$$(3\text{-}c,d)\cdots$$

$$\begin{Bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{b(\alpha^2)^2}{F}, & \dfrac{a}{F} \\ \dfrac{a}{F}, & 0 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} b^1_1 & b^2_1 \\ b^1_2 & b^2_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{b}{F}, & \dfrac{a}{F} \\ \dfrac{a(1+b^2)}{F^3}, & -\dfrac{a^2 b}{F^3} \end{Bmatrix}$$

Gaussの曲率及び平均曲率は次のようになる。

$$K = -a^2/F^4,\quad H = -b(a^2+F^2)/2F^3, \qquad (4\text{-}a,b)$$

(4-a)よりHelicoidal Shellが負の曲率を有するシェルであることがわかる。任意点における基底ベクトル$\mathbf{g}_m$と中央面上の基底ベクトル$\mathbf{a}_m$はshifterを用いて次のように表わせる。

$$\mathbf{g}_\alpha = \mu^\lambda_\alpha \mathbf{a}_\lambda,\quad \mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3 \qquad (5\text{-}a,b)$$

ここに，
$$\mu^1_1 = 1 - \zeta b^1_1,\quad \mu^2_1 = -\zeta b^2_1,$$
$$\mu^1_2 = -\zeta b^1_2,\quad \mu^2_2 = 1 - \zeta b^2_2, \qquad (6\text{-}a\sim d)$$

さらに，
$$\mu = |\mu^\alpha_\beta|,\quad g_{\alpha\beta} = \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta \qquad (7\text{-}a,b)$$

3. 変位後の幾何量

変位ベクトルを中央面上の基底ベクトルの成分で表わすと，

$$\mathbf{V} = u_\alpha \mathbf{a}^\alpha + u_3 \mathbf{a}^3, \qquad (8)$$

となる。変位ベクトルの成分u_mと物理成分$\tilde{u}_m$との関係は以下のように表わせる。

$$\tilde{u}_m = u_m\sqrt{a^{mm}} \quad (\textit{no sum}) \qquad (9)$$

なお，以下において特にことわらない限り，$(\tilde{\ })$は物理成分を示すものとする。微小変位理論の下においては，ひずみテンソルは以下のように表わされる。

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{V}_{,j} + \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{V}_{,i}) \qquad (10)$$

式(10)を変位成分を用いて書き表わすと，

$$\gamma_{\alpha\alpha} = \mu^\kappa_\alpha u_\kappa\|_\alpha - u_3 \mu^\kappa_\alpha b_{\alpha\kappa}$$

$$2\gamma_{\alpha\beta}=\mu_\alpha^\lambda u_\lambda\|_\beta-u_3\mu_\alpha^\lambda b_{\beta\lambda}+\mu_\beta^\lambda u_\lambda\|_\alpha-u_3\mu_\beta^\lambda b_{\alpha\lambda}$$

$$2\gamma_{\alpha 3}=\mu_\alpha^\kappa u_{\kappa,3}+u_\lambda b_\alpha^\lambda+u_{3,\alpha}$$

$$\gamma_{33}=u_{3,3} \qquad (11-a\sim d)$$

となる。ここで，$(\ )\|_\alpha$ は計量テンソル a_{ij}, a^{ij} を用いた共変微分を示し，$(\ )_{,m}$ は通常の微分を示す。なお，ひずみテンソルと物理成分との関係は次のように与えられる。

$$\tilde{\gamma}_{ij}=\gamma_{ij}/\sqrt{g_{ii}g_{jj}} \quad (\text{no sum}) \qquad (12)$$

次に薄板理論における変位関数を次のように仮定する。[4]

$$u_1=u_0(\alpha^\kappa)-\zeta\phi_0(\alpha^\kappa)$$

$$u_2=v_0(\alpha^\kappa)-\zeta\psi_0(\alpha^\kappa) \qquad (13-a\sim c)$$

$$u_3=w_0(\alpha^\kappa)$$

ひずみテンソルに関する kirchhoff の仮定を用いて変数の低減を行なうと，(11-c)式を零とおくことにより，次の関係式が得られる。

$$\phi_0=-\frac{b}{F}u_0+\frac{a}{F}v_0+w_{0,1}$$

$$\psi_0=\frac{a(1+b^2)}{F^3}u_0-\frac{a^2b}{F^3}v_0+w_{0,2} \qquad (14-a.b)$$

すなわち，(14)式を(13)式へ代入することにより，せん断変形を無視した薄板の変位関数が得られる。

4. 平衡方程式

微小要素における釣合方程式を法線方向に直接積分し合力化を行なう方法でも，式(13)の変位関数を用い変分原理を利用する方法でも，平衡方程式は同一になり，以下のように求まる。[2]

$$N^{\kappa\rho}\|_\kappa-Q^\kappa b_\kappa^\rho+H^\rho=0$$

$$Q^\kappa\|_\kappa+N^{\kappa\rho}b_{\kappa\rho}+H^3=0 \qquad (15-a\sim c)$$

$$M^{\kappa\rho}\|_\kappa-Q^\rho+M^\rho=0$$

ここに，断面力及び外力項は応力テンソルを用いて次のように表わされる。

$$N^{\alpha\beta}=\int\sigma^{\alpha\kappa}\mu_\kappa^\beta\,\mu\,d\zeta, \quad M^{\alpha\beta}=\int\sigma^{\alpha\kappa}\mu_\kappa^\beta\,\mu\zeta d\zeta,$$

$$Q^\alpha=\int\sigma^{\alpha 3}\mu\,d\zeta, \quad H^\rho=\int\sigma^\kappa\mu_\kappa^\rho\,\mu\,d\zeta,$$

$$H^3=\int\sigma^3\mu\,d\zeta, \quad M^\rho=\int\sigma^\kappa\mu_\kappa^\rho\,\zeta\mu d\zeta,$$

$$\mathbf{P}=\sigma^\alpha\mu_\alpha^\lambda\mathbf{a}_\lambda+\sigma^3\mathbf{a}_3 \qquad (16-a\sim g)$$

ただし，$\mathbf{P}$ は外力ベクトルを示す。

断面力及び外力の物理成分は次のようになる。

$$\tilde{N}^{\alpha\lambda}=N^{\alpha\lambda}\sqrt{a_{\lambda\lambda}/a^{\alpha\alpha}}, \quad \tilde{Q}^{(\alpha)}=Q^\alpha/\sqrt{a^{\alpha\alpha}},$$

$$\tilde{M}^{\alpha\lambda}=M^{\alpha\lambda}\sqrt{a_{\lambda\lambda}/a^{\alpha\alpha}}, \quad \tilde{H}^\lambda=\sqrt{a_{\lambda\lambda}}\,H^\lambda,$$

$$\tilde{M}^\lambda=M^\lambda\sqrt{a_{\lambda\lambda}}, \quad \tilde{H}^3=H^3 \qquad (17-a\sim f)$$

上記の物理成分を用いて平衡方程式を表わすと，以下のようになる。

$$\frac{\sqrt{a^2+(\alpha^2)^2}\sqrt{1+b^2}}{F}\frac{\tilde{N}^{11}_{,1}}{\sqrt{a^2+(\alpha^2)^2}}+\frac{ab\alpha^2\sqrt{1+b^2}}{F^3}\tilde{N}^{11}$$
$$+\frac{\sqrt{a^2+(\alpha^2)^2}\sqrt{1+b^2}}{F}\frac{\tilde{N}^{21}_{,2}}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{\alpha^2(1+b^2)\sqrt{a^2+(\alpha^2)^2}}{F^3}(\tilde{N}^{21}+\tilde{N}^{12})$$
$$+\frac{b\sqrt{a^2+(\alpha^2)^2}\sqrt{1+b^2}}{F^2}\tilde{Q}^1-\frac{a\{a^2+(\alpha^2)^2\}(1+b^2)}{F^4}\tilde{Q}^2+\tilde{H}^1=0$$

$$\frac{\sqrt{a^2+(\alpha^2)^2}\sqrt{1+b^2}}{F}\frac{\tilde{N}^{12}_{,1}}{\sqrt{a^2+(\alpha^2)^2}}-\frac{\alpha^2\sqrt{a^2+(\alpha^2)^2}(1+b^2)}{F^3}\cdot\tilde{N}^{11}$$
$$-\frac{ab\alpha^2\sqrt{1+b^2}}{F^3}(\tilde{N}^{12}+\tilde{N}^{21})+\frac{\sqrt{a^2+(\alpha^2)^2}\sqrt{1+b^2}}{F}\frac{\tilde{N}^{22}_{,2}}{\sqrt{1+b^2}}$$
$$+\frac{\alpha^2}{F\sqrt{a^2+(\alpha^2)^2}}\tilde{N}^{22}-\frac{a(1+b^2)}{F^2}\tilde{Q}^1+\frac{a^2b\sqrt{a^2+(\alpha^2)^2}\sqrt{1+b^2}}{F^4}\tilde{Q}^2+\tilde{H}^2=0$$

$$-\frac{b(\alpha^2)^2\sqrt{1+b^2}}{F^2\sqrt{a^2+(\alpha^2)^2}}\tilde{N}^{11}+\frac{a}{F^2}(\tilde{N}^{12}+\tilde{N}^{21})+\frac{\sqrt{a^2+(\alpha^2)^2}\sqrt{1+b^2}}{F}\frac{\tilde{Q}^1_{,1}}{\sqrt{a^2+(\alpha^2)^2}}$$
$$+\frac{\sqrt{a^2+(\alpha^2)^2}\sqrt{1+b^2}}{F}\frac{\tilde{Q}^2_{,2}}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{\alpha^2}{F\sqrt{a^2+(\alpha^2)^2}}\tilde{Q}^2+\tilde{H}^3=0$$

$$\frac{\sqrt{a^2+(\alpha^2)^2}\sqrt{1+b^2}}{F}\frac{\tilde{M}^{11}_{,1}}{\sqrt{a^2+(\alpha^2)^2}}+\frac{ab\alpha^2\sqrt{1+b^2}}{F^3}\tilde{M}^{11}$$
$$+\frac{\sqrt{a^2+(\alpha^2)^2}\sqrt{1+b^2}}{F}\frac{\tilde{M}^{21}_{,2}}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{\alpha^2\sqrt{a^2+(\alpha^2)^2}(1+b^2)}{F^3}(\tilde{M}^{12}+\tilde{M}^{21})$$
$$-\frac{\sqrt{a^2+(\alpha^2)^2}\sqrt{1+b^2}}{F}\tilde{Q}_1+\tilde{M}^1=0$$

$$\frac{\sqrt{a^2+(\alpha^2)^2}\sqrt{1+b^2}}{F}\frac{\tilde{M}^{12}_{,1}}{\sqrt{a^2+(\alpha^2)^2}}-\frac{\alpha^2\sqrt{a^2+(\alpha^2)^2}(1+b^2)}{F^3}\tilde{M}^{11}$$
$$-\frac{ab\alpha^2\sqrt{1+b^2}}{F^3}(\tilde{M}^{12}+\tilde{M}^{21})+\frac{\sqrt{a^2+(\alpha^2)^2}\sqrt{1+b^2}}{F}\frac{\tilde{M}^{22}_{,2}}{\sqrt{1+b^2}}$$
$$+\frac{\alpha^2}{F\sqrt{a^2+(\alpha^2)^2}}\tilde{M}^{22}-\frac{\sqrt{a^2+(\alpha^2)^2}\sqrt{1+b^2}}{F}\tilde{Q}^2+\tilde{M}^2=0$$

$$(18-a\sim e)$$

5. 構成方程式

通常のシェル理論に従い，応力テンソルに関する *Love* の仮定を用いると，Hooke の法則は以下のように表わされる。[2]

$$\sigma^{\alpha\beta}=G\left\{g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}+g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}+\frac{2\nu}{(1-\nu)}g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}\right\}\gamma_{\gamma\delta} \qquad (19)$$

ここに，G はせん断弾性係数，ν はポアソン比，$g^{\alpha\beta}$ は反変テンソルを示す。式(19)を陽な形で表わすと，

$$\sigma^{11}=\frac{E}{1-\nu^2}\left[\gamma_{11}\left(\frac{g_{22}}{F^2\mu^2}\right)^2-2\gamma_{12}\frac{g_{22}g_{12}}{(F^2\mu^2)^2}+\gamma_{22}\left(\frac{g_{12}}{F^2\mu^2}\right)^2+\nu\gamma_{22}\frac{1}{F^2\mu^2}\right]$$

$$\sigma^{22}=\frac{E}{1-\nu^2}\left[\gamma_{22}\left(\frac{g_{11}}{F^2\mu^2}\right)^2-2\gamma_{12}\frac{g_{11}g_{12}}{F^4\mu^4}+\gamma_{11}\left(\frac{g_{21}}{F^2\mu^2}\right)^2+\nu\gamma_{11}\frac{1}{F^2\mu^2}\right] \qquad (20-a\sim c)$$

$$\sigma^{12}=\frac{E}{1-\nu^2}\left[-\gamma_{11}\frac{g_{22}g_{12}}{F^4\mu^4}-\gamma_{22}\frac{g_{11}g_{12}}{F^4\mu^4}+\gamma_{12}\frac{\{g_{11}g_{22}+(g_{12})^2\}}{F^4\mu^4}-\nu\gamma_{12}\frac{1}{F^2\mu^2}\right]$$

となる。なお仮定により $\sigma^{\kappa 3}=\sigma^{33}=0$ である。応力テンソルと物理成分との関係は以下の式で与えられる。

$$\tilde{\sigma}^{\alpha\beta}=\sigma^{\alpha\beta}\sqrt{g_{\beta\beta}/g^{\alpha\alpha}} \qquad (21)$$

式(20)を式(16)へ代入すれば，断面力－変位の関係を求められるが，紙面の都合上省略する。

6. 参考文献

1. Reissner： J. Appl. Mech. Vol.22(1955) P31.
2. 西村：テンソルとシェル理論（彰国社）．1977
3. 鬼頭　微分幾何（ダイヤモンド社）．1972
4. Washizu：*Variational Method in Elasticity and Plasticity*. 1968