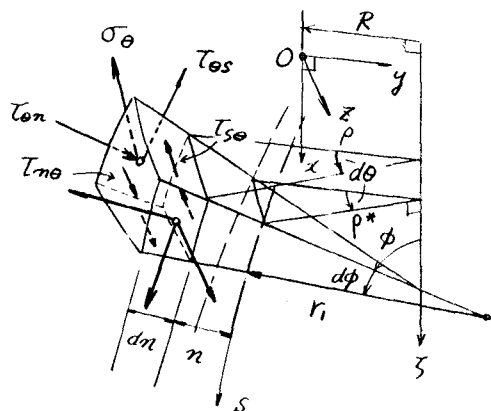


秋田大学 正員 ○ 薄 木 征 三
秋田大学 正員 榎 農 知 徳

1 まえがき せん断変形をも考慮した任意断面薄肉ばりの挙動の定式化に近年著しい発展が見られる。これとは別に、横断面不変のみを基礎とし、応力の軸方向のつり合い式を満足せんとする立場がある。本報告はこの立場から、最近の薄肉ばり理論の成果をも考慮し、コンクリート床版のような厚板の肉厚方向のせん断変形をも考えた変位場を示すものである。

2. 変位表示のつり合い式



(1) 厚板部分 直交曲線座標 (s, n, θ) でのつり合い式は

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial s} (\rho^2 \tau_{\theta s}) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial n} (\rho^2 \tau_{\theta n}) = r_c \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1)$$

以下では慣性力も考慮し r_c は板の密度、 w は軸方向変位。座標原点 O の x, y, θ 方向の変位を u_0 、

v_0 、 w_0 、断面回転角を φ とすると横断面不変の仮定から任意点 (x, y, θ) の変位は

$$u = u_0 - y\varphi, \quad v = v_0 + x\varphi, \quad w = w_0 + \tilde{w} \quad (2)$$

これをひずみ-変位関係式に代入して

$$\begin{aligned} \tau_{\theta n} &= \rho \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\tilde{w}}{\rho} \right) + \frac{R}{\rho} (m\phi_y - l\phi_x + r_n \varphi') \\ \tau_{\theta s} &= \rho \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\tilde{w}}{\rho} \right) + \frac{R}{\rho} \{ m\phi_x + l\phi_y + (r_s^* + n)\varphi' \} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{R}{\rho} \left(\varepsilon_\theta' - \frac{x}{R} \varphi' + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} \right) \quad \dots (3) \end{aligned}$$

ここで $\partial x = R \partial \theta ='$ および

$$\phi_y = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad \phi_x = \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{w_0}{R}, \quad \varepsilon_\theta' = \frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{v_0}{R} \quad (4)$$

そして l, m は座標 s の方向余弦であり

$$l = \frac{\partial x^*}{\partial s}, \quad m = \frac{\partial y^*}{\partial s} \quad (5)$$

1次元でのフックの法則

$$\tau_{\theta n} = G_s \gamma_{\theta n}, \quad \tau_{\theta s} = G_s \gamma_{\theta s}, \quad \sigma_\theta = E_c \varepsilon_\theta \quad (6)$$

を用いて (3) を (1) に代入し、 $\rho^2/G_c R^2$ を乗ずると

$$\begin{aligned} & \frac{E_c}{G_c} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{\rho^3}{R^2} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{R}{\rho} \tilde{w} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \frac{\rho^3}{R^2} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{R}{\rho} \tilde{w} \right) \right\} \\ & - \frac{\rho^2}{R^2} \frac{r_c}{G_c} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial t^2} - \frac{\rho^2}{R^2} \frac{r_c}{G_c} \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - \frac{E_c}{G_c} \left(\varepsilon_\theta' - \frac{x}{R} \varphi' \right) \\ & - \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{\rho}{R} [m\phi_x + l\phi_y + (r_s^* + n)\varphi'] \right\} \\ & - \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \frac{\rho}{R} (m\phi_y - l\phi_x + r_n \varphi') \right\} \quad \dots (7) \end{aligned}$$

(2) 薄肉部分 これは薄肉の仮定

$$\tau_{\theta n} = 0 \quad \dots (8)$$

によって $\tilde{w}$ は $*$ を薄肉中央面の量として

$$\tilde{w} = \tilde{w}^* - \frac{R}{\rho^*} (m\phi_y - l\phi_x + r_n \varphi') \cdot n \quad (9)$$

である。よって薄肉中心線に沿う $\tau_{\theta s}$ と直ひずみ ε_θ は n の1次式となるから薄肉のつり合い式は

$$\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial \sigma_\theta^*}{\partial \theta} h + \frac{1}{\rho^{*2}} (\rho^{*2} \tau_{\theta s}^* h) = r_s \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} \cdot h \quad (10)$$

ここで h は板厚、 r_s は密度である。(9) を (3) に代入し、さらに上式に代入すると

$$\begin{aligned} & \frac{E_s}{G_s} \frac{\partial^2 \tilde{w}^*}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{\rho^3}{R^2} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{R}{\rho^*} \tilde{w}^* \right) \right\} - \frac{\rho^{*2}}{R^2} \frac{r_s}{G_s} \frac{\partial^2 \tilde{w}^*}{\partial t^2} \\ & = \frac{\rho^{*2}}{R^2} \frac{r_s}{G_s} \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - \left(\varepsilon_\theta' - \frac{x}{R} \varphi' \right) \frac{E_s}{G_s} \\ & - \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{\rho^*}{R} (m\phi_x + l\phi_y + r_s^* \varphi') \right\} \quad (11) \end{aligned}$$

これは (7) の特別の場合である。ただし上式では板厚 h は区分的に一定であるとした。

2. $\tilde{w}$ の解 (x, y) 座標の原点を断面の図心の近傍にとると、 R が断面寸法の10倍程度以上では

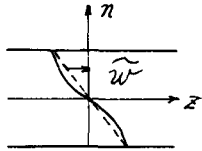
$$\frac{\rho}{R} \approx \frac{\rho^*}{R} \approx 1 \quad \dots \dots \dots (12)$$

が成り立つことが知られている。よって式 (7) は

$$\begin{aligned} & \frac{E_c}{G_c} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial n^2} - \frac{J_c}{G_c} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \bar{x}^2} \\ &= \frac{J_c}{G_c} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \bar{x}^2} - \frac{E_c}{G_c} (\varepsilon_x' - \frac{x}{R} \varphi') - \left(\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial s^2} \phi_x \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial s^2} \phi_y + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial s^2} \varphi' \right) \quad \dots \dots \dots (13) \end{aligned}$$

この過程で $\partial n / \partial x = \partial l / \partial n = 0$ が用いられている。

(1) 同次解 上式で右辺=0 とおくとラプラスの方程式であるから変数分離で解かれる。ただし図に示すように板厚方向にそり $\tilde{w}$ は直線的に変化するものと仮定する。自由振動を考慮するものとして



$$\tilde{w}_I = S(s, x) (1 + \kappa \cdot n) \sin \omega t \quad \dots \dots (14)$$

を (13) の左辺に代入して s, x について再び変数分離すると $S(s, x)$ が陽な形で得られる。(15)

$$\tilde{w}_I = (Ae^{\mu s} + Be^{-\mu s}) (1 + \kappa \cdot n) \sin \frac{i\pi}{L} x \cdot \sin \omega t$$

ここで L = 軸線の弧長、 $i = 1, 2, 3, \dots$

であり、また

$$\mu = \sqrt{\frac{i^2 \pi^2 E_c}{L^2 G_c} - \frac{J_c}{G_c} \omega^2} \quad \dots \dots \dots (16)$$

κ はポテンシャルエネルギー極小の条件から決定され、 A, B は積分定数。

(2) 特解 未知変位は軸線の変位 u_0, v_0, w_0 および φ であるから、これらをフーリエ級数で表わし、かつ自由振動しているとする

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \varphi \end{Bmatrix} = \sin \omega t \cdot \begin{Bmatrix} U_1 & V_1 \\ U_2 & V_2 \\ U_3 & V_3 \\ U_4 & V_4 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin \frac{i\pi}{L} x \\ \cos \frac{i\pi}{L} x \end{Bmatrix} \quad (17)$$

U_1, U_2 などは係数であり未知量。上式を (4) に代入すると $\varepsilon_x, \varphi, \dots$ 、したがって (13) 右辺の $\varepsilon_x', \varphi', \dots$ もフーリエ表示される。これを $\sin, \cos$ について整理する。 $\sin$ の項について整理すると

$$\text{右辺} = \sin \frac{i\pi}{L} x \cdot \sin \omega t \times$$

$$\left(F_0 + F_1 x + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial s^2} F_2 + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial s^2} F_3 + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial s^2} F_4 \right) \quad (18)$$

の形となる。 F_j は (17) の係数 U_i, V_i の1次式である。座標 x と x^* は

$$x = x^* + l \cdot n = x^* + \frac{\partial x^*}{\partial s} \cdot n \quad \dots \dots (19)$$

の関係があることを考慮すると特解は

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{II} = & \left\{ -\frac{F_0}{\mu^2} + \frac{F_1}{2} \left(e^{\mu s} x^* e^{-\mu s} + e^{-\mu s} x^* e^{\mu s} \right) \cdot n \right. \\ & + \frac{E^{\mu s}}{2\mu} \left((F_1 x^* + \mu^2 y^* F_2 + \mu^2 x^* F_3 + \mu V_3^* F_4) e^{-\mu s} \right. \\ & \left. \left. + \frac{E^{-\mu s}}{2\mu} \left((-F_1 x^* - \mu^2 y^* F_2 - \mu^2 x^* F_3 + \mu V_3^* F_4) e^{\mu s} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - y^* F_2 + x^* F_3 \right) \sin \frac{i\pi}{L} x \sin \omega t \right\} \quad (20) \end{aligned}$$

3. 積分定数の決定 板厚中心線上の変位は (15)、(20) で $n=0$ として

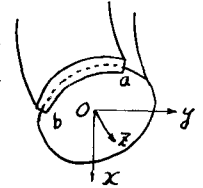
$$\begin{aligned} \tilde{w}^* &= \tilde{w}_I^* + \tilde{w}_{II}^* \\ &= A e^{\mu s} + B e^{-\mu s} + f(s, F) \quad (21) \end{aligned}$$

ただし $\sin i\pi x / L \cdot \sin \omega t$ は断面内で無関係であるから取り除き $f(s, F_j)$ は式 (20) の $\{ \}$ 内で $n=0$ とおいたもの。板厚中央面の r_{0s}^* も (3) で $\rho/R \approx 1, n=0$ で $\tilde{w} = \tilde{w}^*$ と置いて (21) を代入すると

$$r_{0s}^* = \mu (A e^{\mu s} - B e^{-\mu s}) + g(s, F_j, U_i, V_i) \quad (22)$$

の形になる。 U_i, V_i は式 (17)、 F_j は前述のように U_i, V_i の1次式である。

図において床版部分の積分定数を A_s, B_s とすると、これらは2点 a、b での



$\tilde{w}^*$ と r_{0s}^* の連続条件から2元連立方程式を2個解いて定まり、結局4個の積分定数は軸線の変位のフーリエ係数 U_i, V_i の1次式で表わされる。以上で変位場が定まり、(3) によって断面力一変位関係も U_i, V_i と κ で表わされ1次元問題に縮小される。これらはポテンシャルエネルギー一を W とすると

$$\frac{\partial W}{\partial U_i} = \frac{\partial W}{\partial V_i} = \frac{\partial W}{\partial \kappa} = 0 \quad \dots \dots (23)$$

から荷重と境界条件 を考慮して定まる。