

大阪大学工学部 正員 林 正
大阪大学工学部 正員 前田 幸雄

1. まえがき

解析の対象となる構造物には制約はあるが、有限帯板法は種々の薄肉構造の解析に適用されている¹⁾。有限帯板法は、線形解析ではその解析の簡便性が十分に生かされ、効率性の良い実用解法としての意義は大きい。しかし、幾何学的非線形解析では、面内と面外方向のすべての変位成分が達成し、かつ、これらの変位を直交関数系を用いて級数展開しても非線形項では直交性が満足されないために、各級数の連成項は消えない。また、薄肉構造物では多数の補剛材が用いられているために、構造全体の变形モードのみを用いた従来の有限帯板法では、これらの補剛材の取付位置において節が生じるような変位関数を仮定することができない。

線形変位解析を除けば、有限帯板法による非線形解析に関する研究^{2),3)}は極めて数少なく、これらの研究では弾性帯板要素でも数値積分により剛性行列が求められているために計算時間が極めて長く、効率が悪い。そこで、本研究では幾何学的剛性行列を解析的に求めることにより、解析精度を高めるとともに計算時間を大幅に短縮するため定式化を行なった。さらに、実際の薄肉構造物の非線形挙動をより忠実に解析するために、補剛材に囲まれたパネル内部で定義される局部変形モードを用いた解析法⁴⁾を報告する。

2. 変位関数

解析に用いた仮定は、通常の有限帯板法において用いられている仮定と同じであるが、1節点の自由度は必ずみの連続性を考慮して6自由度とした。すなわち、直交座標軸(x, y, z)方向の変位成分(u, v, w)のほか

$$\phi = \partial u / \partial y, \quad \psi = \partial v / \partial y, \quad \theta = \partial w / \partial y \quad (1)$$

なる3成分を用いた。薄板の面外変位成分wの変位関数には、系全体の变形モードに前述の局部モードを加えた関数を用いた。図-1に示すような帯板要素については、次式のようになる。

$$u = f_1^T \sum_m d_m \cos(m\pi x / \ell), \quad v = f_2^T \sum_m d_m \sin(m\pi x / \ell) \quad (2)$$

$$w_M = f_3^T \sum_m d_m \sin(m\pi x / \ell) + \sum_n \hat{w}_n (1 - \cos 2n\pi \hat{x} / a) \cdot (1 - \cos 2n\pi \hat{y} / b) \quad (3)$$

ここに、 f_i はyに関する3次関数を要素³⁾とする12次の列ベクトル、 d_m はx軸方向に級数展開された第m節線の節線変位の第m項を要素とするベクトル

$$d_m = \{u_{im}, \phi_{im}, v_{im}, \psi_{im}, u_{jm}, \phi_{jm}, v_{jm}, \psi_{jm}, w_{im}, \theta_{im}, w_{jm}, \theta_{jm}\}^T \quad (4)$$

である。また、式(3)の w_M は第Mパネルで定義された面外変位成分であり、右辺第1項が全体モード、第2項が局部モードを表わす。 $(\hat{x}, \hat{y})$ は第Mパネルで定義された直交座標である。

補剛材は棒要素として扱い、その変形は微小変位理論に従うものとする。補剛材の変位と帯板要素の変位の適合性を満足させるために、横リブ材の変位は式(2), (3)の関数 f_i を用いて d_m で表わし、縦リブ材の変位はx軸方向に級数展開した。

3. 平衡方程式

Kirchhoffの仮定により、必ずみの3成分 $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ は零であり、残りの3成分は次式を用いる。

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (5)$$

仮想仕事の原理により各帯板要素の平衡方程式を導くと、以下のようになる。

まず、着目している帯板要素の第Mパネルの局部変形を $\hat{d}_M$ で表わし、これを全パネルについて $\hat{D}$ で表わす。

$$\hat{d}_M = \{\hat{d}_1, \hat{d}_2, \dots, \hat{d}_n, \dots\}^T, \quad \hat{D} = \{\hat{d}_1, \hat{d}_2, \dots, \hat{d}_M, \dots\}^T \quad (6)$$

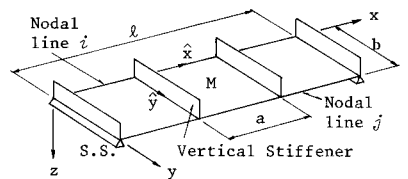


Fig. 1 Strip element

第Mパネルの局部モードに対応する外力ベクトルを $\hat{F}_M$ とおき、これを全パネルについてまとめて $\hat{F}$ とおく。

$$\hat{F} = \{\hat{f}_1, \hat{f}_2, \dots, \hat{f}_M, \dots\}^T \quad (7)$$

さらに、全体モードについては、級数展開した節線変位と外力ベクトルをまとめて次式のようにおく。

$$D = \{d_1, d_2, \dots, d_m, \dots\}^T, \quad F = \{f_1, f_2, \dots, f_m, \dots\}^T \quad (8)$$

以上の諸式を用いると、仮想変位の原理より、帯板要素の平衡方程式は次式のようになる⁴⁾。

$$\begin{Bmatrix} F \\ \hat{f}_1 \\ \vdots \\ \hat{f}_M \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12}^T & \dots & K_{12}^M & \dots \\ K_{21}^T & K_{22} & & 0 & \\ \vdots & & \ddots & & \\ K_{M1}^M & & & K_{22}^M & \\ \vdots & & & 0 & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D \\ \hat{d}_1 \\ \vdots \\ \hat{d}_M \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (9)$$

または、

$$\begin{Bmatrix} F \\ \hat{F} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & \hat{K}_{12} \\ \hat{K}_{21} & \hat{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D \\ \hat{D} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

式(10)より局部モードを消去すると

$$Q = K \cdot D \quad (11) \quad Q = F - \hat{K}_{12} \hat{K}_{22}^{-1} \hat{F}, \quad K = K_{11} - \hat{K}_{12} \hat{K}_{22}^{-1} \hat{K}_{21} \quad (12)$$

式(9)より明らかのように、 $\hat{K}_{22}$ はブロック対角行列であるので、式(12)の各式の右辺第2項を求めるための演算は各パネルごとに行なうことができ、大きなサイズの行列演算を必要としない。

式(9)または(10)の剛性行列 K_{11} は、局部変形モードを考慮しない場合の剛性行列であり、通常の有限帯板法で用いられるものである。線形解析の場合には、横リブ材が無ければ式(2)、(3)で与えた変位関数の性質により、各級数項の変位モードは連成しない。したがって、この場合には K_{11} はブロック対角行列で表わされる。しかし、非線形解析の場合には、上述の直交性による利点はなくなる。なお、補剛材の剛性は K_{11} のみに含まれている。

K_{11} の帯板要素の剛性行列の線形項を K^L 、幾何学的非線形項を K^N で表わし、これらの行列の第(m,n)小行列を12次元正方形行列 k_{mn}^L, k_{mn}^N で表わすと、以下のようになる。

$$K_{11} = K^L + K^N = [k_{mn}^L] + [k_{mn}^N] \quad (13)$$

$$k_{mn}^L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & K_P^L & & 0 \\ & & 8 & 9 & 12 \\ & 0 & & & K_B^L \end{bmatrix} \quad (14), \quad k_{mn}^N = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & k_1 \\ & & 8 & 9 & 12 \\ & & k_2 & & k_3 \end{bmatrix} \quad (15), \quad \left. \begin{aligned} k_1(m,n) &= k_2^T(n,m) \\ k_3(m,n) &= k_3^T(n,m) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

ここに、 k_P^L は線形の面内及び面外剛性である。非線形項 k_{mn}^N には節線変位成分の級数項が含まれているが、この変位成分の級数番号 m, n を入れ替えた行列について、式(16)の関係が成り立つ。

k_{mn}^N の第(1,9)要素を示すと、次式のようになる。ここに、 Σ は全級数総和、 t は板厚、 ν はポアソン比を表わす。

$$k_{1,9} = \frac{Et}{1-\nu^2} \sum_k \left\{ \frac{b}{2520} (774w_{ik} + 97b\theta_{ik} + 162w_{jk} - 774b\theta_{jk})P_1 + \frac{\nu}{70b} (42w_{ik} - b\theta_{ik} - 42w_{jk} + 8b\theta_{jk})P_2 \right. \\ \left. + \frac{1-\nu}{140b} (42w_{ik} + 9b\theta_{ik} + 42w_{jk} - 9b\theta_{jk})P_3 + \frac{1-\nu}{140b} (42w_{ik} - b\theta_{ik} - 42w_{jk} + 8b\theta_{jk})P_4 \right\} \quad (17)$$

$$P_1 = -\alpha_m \alpha_n \alpha_k C_k, \quad P_2 = \alpha_m \alpha_n C_k, \quad P_3 = \alpha_k C_n, \quad P_4 = \alpha_n C_m, \quad \alpha_m = (m\pi/l) \quad (18)$$

$$C_k = \int_0^l \sin \alpha_k x \cdot \cos \alpha_m x \cdot \cos \alpha_n x \cdot dx = \frac{2l}{\pi} \frac{k(k^2 - m^2 - n^2)}{(k^2 - m^2 - n^2)^2 - 4m^2 n^2} \quad (19)$$

4. 考 察

本解析法により、従来から有限帯板法では扱うことができなかった局部変形の影響を考慮することができ、その影響も荷重の載荷状態によって顕著に現われる⁴⁾。また、数値計算においては構造全体の未知量が増加しないので、計算時間は通常の有限帯板法と殆んど変わらない。さらに、剛性行列を解析的に求めたことにより、計算時間を数値積分を用いる場合の較分の一に短縮することができた。本研究は、芦田義則君(現、建設省勤務)と四十良利夫君(現、兵庫県勤務)の卒業研究として行なったものであり、付記1で両君に謝意を表す。

1) Cheung, Y.K.: *Finite Strip Method in Structural Analysis*, Pergamon Press, 1976. 2) 上田 秀他: 有限帯板法による平板の弾塑性大変形解析, 関西造船協会誌, 第44号, 1974. 3) Maeda, Y., et al.: *Elasto-Plastic Analysis of Thin-Walled Structures by Finite Strip Method*, Tech. Rep. of the Osaka Univ., Vol.26, 1976. 4) Maeda, Y., et al.: *Nonlinear Analysis of Thin-Walled Structures Considering Local Deformation of Panel Plate*, Tech. Rep. of the Osaka Univ., Vol.28, 1978.