

早稲田大学 正員 ○依田照秀

早稲田大学 正員 平山島政治

早稲田大学 学生員 井浦雅司

1. まえがき

本報告は、初期曲率(k_2, k_3)と初期捻率(k_1)を有する薄肉空間曲線部材を対象とし、薄肉直線部材の解析で使われている仮定¹⁾と基礎に、変位と平面的な変位とそれに伴う変位に分けて考察し²⁾、精度の高い有限変位場を誘導することを目的としている。

全体の記述はSchroederの論文²⁾に類似しているが、主な相違点は、そり変位とそり関数と捻率との積で表現し、そり関数として微小変位理論による初期曲率と初期捻率を有する薄肉空間曲線部材のそり関数³⁾を用い、捻率を变形後の棒軸の捻率を利用して求めた点にある。

2. 有限変位場

全変位ベクトル $\mathbf{V}$ を次のように分けて考える。²⁾

$$\mathbf{V} = \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{w} \quad (1)$$

ここに、 $\tilde{\mathbf{v}}$, $\tilde{\mathbf{u}}$, $\mathbf{w}$ はそれぞれ、重心軸の変位によって生じる任意点Pの変位ベクトル、变形後の棒軸回りの回転による変位ベクトル、それに伴う変位ベクトルである。

今、变形前の単位基底ベクトルを $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$ 、変位ベクトル $\tilde{\mathbf{v}}$ が作る変位後の単位基底ベクトルを $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$ 、変位ベクトル $\tilde{\mathbf{u}}$ が作る変位後の単位基底ベクトルを $(\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3)$ と表わせば、 $\hat{\mathbf{e}}_i, \tilde{\mathbf{e}}_i, \bar{\mathbf{e}}_i$ ($i=1,2,3$)の間には次の関係が成り立つ。²⁾

$$\bar{\mathbf{e}}_i = \bar{\Psi}_{im} \hat{\mathbf{e}}_m, \quad \tilde{\mathbf{e}}_i = \tilde{\Psi}_{im} \bar{\mathbf{e}}_m, \quad \bar{\mathbf{e}}_i = \text{Dim} \hat{\mathbf{e}}_m \quad (2a, b, c)$$

ここに、 $\bar{\Psi}_{im}, \tilde{\Psi}_{im}, \text{Dim}$ はそれぞれ

$$\bar{\Psi}_{im} = e_{iem} + (\delta_{im} - e_{iem}) \cos \alpha + e_{imk} e_{kn} \sin \alpha, \quad (3a)$$

$$\tilde{\Psi}_{im} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \text{Dim} = \tilde{\Psi}_{is} \tilde{\Psi}_{sm} \quad (3b, c)$$

とかける。²⁾

そり変位は近似的に $\tilde{\mathbf{e}}_1$ 方向へ生ずるものとするれば、

$$\mathbf{w} = w \tilde{\mathbf{e}}_1 = w \text{Dim} \hat{\mathbf{e}}_m \quad (4)$$

とおける。従って、棒軸の変位ベクトルを $\mathbf{v}$ とおけば、

図1より任意点Pの変位ベクトルは

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + \tilde{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{s}} + \tilde{\mathbf{s}} - \tilde{\mathbf{s}} + w \tilde{\mathbf{e}}_1 \quad (5)$$

と表わせる。ここに、

$$\hat{\mathbf{s}} = y_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + y_3 \hat{\mathbf{e}}_3, \quad \tilde{\mathbf{s}} = y_2 \tilde{\mathbf{e}}_2 + y_3 \tilde{\mathbf{e}}_3, \quad \tilde{\mathbf{s}} = y_2 \bar{\mathbf{e}}_2 + y_3 \bar{\mathbf{e}}_3 \quad (6a, b, c)$$

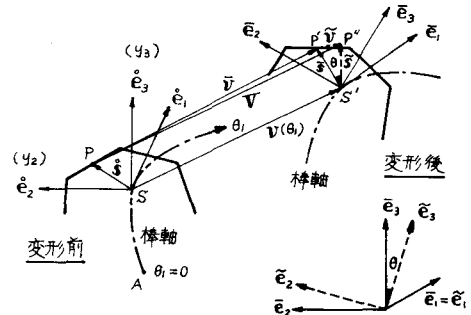


図1

である。

故に全変位ベクトルは次式で表わせる。

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= v^i \hat{\mathbf{e}}_i - (y_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + y_3 \hat{\mathbf{e}}_3) + (y_2 \tilde{\mathbf{e}}_2 + y_3 \tilde{\mathbf{e}}_3) + w \tilde{\mathbf{e}}_1 \\ &= \{v^1 + y_2 D_{21} + y_3 D_{31} + w D_{11}\} \hat{\mathbf{e}}_1 \\ &\quad + \{v^2 - y_2 (1 - D_{22}) + y_3 D_{32} + w D_{12}\} \hat{\mathbf{e}}_2 \\ &\quad + \{v^3 + y_2 D_{23} - y_3 (1 - D_{33}) + w D_{13}\} \hat{\mathbf{e}}_3. \end{aligned} \quad (7)$$

棒軸に関する変位成分を用いて、そり変位を表わすため、 $\mathbf{w}$ を次のように積の形で表現する。

$$\mathbf{w} = -\omega \hat{\mathbf{t}}_0 = -\omega (\hat{\mathbf{t}}_0 - \mathbf{k}_1) \quad (8)$$

ここに、 ω は微小変位理論より求まる初期曲率と初期捻率を有する薄肉空間曲線部材のそり関数であり、薄肉開断面部材の場合には

$$\omega = \frac{h^2}{\sqrt{3}} \theta^3 + \sqrt{3} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{h_n}{3} d\theta^2 \quad (9)$$

とかける。³⁾ さらに、 $\hat{\mathbf{t}}_0$ を変位 $\tilde{\mathbf{v}}$, $\tilde{\mathbf{u}}$ が生じた後の捻率とすると、

$$\hat{\mathbf{t}}_0 = \tilde{\mathbf{e}}_{2,1} \cdot \tilde{\mathbf{e}}^3 = \tilde{\mathbf{e}}_{2,1} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_3 \quad (\text{ただし}, (,)_1 = \frac{\partial (,)}{\partial \theta_1}) \quad (10)$$

とおけるので、捻率 $\hat{\mathbf{t}}_0$ は

$$\hat{\mathbf{t}}_0 = \hat{\mathbf{t}}_0 - k_1$$

$$\begin{aligned} &= D_{21} D_{21,1} + D_{22} D_{22,1} + D_{23} D_{23,1} + k_1 (\bar{\Psi}_{22} \bar{\Psi}_{33} - \bar{\Psi}_{23} \bar{\Psi}_{32} - 1) \\ &\quad + k_2 (\bar{\Psi}_{23} \bar{\Psi}_{31} - \bar{\Psi}_{21} \bar{\Psi}_{33}) + k_3 (\bar{\Psi}_{21} \bar{\Psi}_{32} - \bar{\Psi}_{31} \bar{\Psi}_{22}) \end{aligned} \quad (11)$$

となる。

従って、回転角 θ と除く変位成分(v^1, v^2, v^3)に対して、3次以上の高次項を無視すれば、全変位ベクトルは共変微分を用いて次のようにかける。

$$\mathbf{V} \equiv w \tilde{\mathbf{e}}_1 + u \tilde{\mathbf{e}}_2 + v \tilde{\mathbf{e}}_3, \quad \text{すなわち},$$

$$\begin{aligned} V = & \left[V^1 + y_2 \{ \cos \theta (-V^2_{11} + V^2_{11} V^1_{11}) - \sin \theta (-V^3_{11} + V^3_{11} V^1_{11}) \} + y_3 \{ \cos \theta (-V^2_{11} + V^2_{11} V^1_{11}) - \sin \theta (-V^3_{11} + V^3_{11} V^1_{11}) \} \right. \\ & - \{ \theta_{,1} + \frac{1}{2} (V^2_{11})_{,1} V^2_{11} - \frac{1}{2} (V^3_{11})_{,1} V^3_{11} - \frac{1}{2} K_1 (V^2_{11})^2 + (V^3_{11})^2 \} + K_2 (V^2_{11} - V^2_{11} V^1_{11}) + K_3 (V^2_{11} - V^2_{11} V^1_{11}) \} \omega \left. \right] \hat{e}_1 \\ & + \left[V^2 - y_2 \{ 1 - \cos \theta (1 - \frac{1}{2} (V^2_{11})^2) + \frac{1}{2} \sin \theta V^2_{11} V^1_{11} \} + y_3 \{ -\frac{1}{2} \cos \theta V^2_{11} V^1_{11} - \sin \theta (1 - \frac{1}{2} (V^2_{11})^2) \} \right. \\ & - \{ \theta_{,1} V^2_{11} + K_1 (V^2_{11})^2 + K_2 V^2_{11} V^1_{11} \} \omega \left. \right] \hat{e}_2 \\ & + \left[V^3 + y_2 \{ -\frac{1}{2} \cos \theta V^2_{11} V^1_{11} + \sin \theta (1 - \frac{1}{2} (V^2_{11})^2) \} - y_3 \{ 1 - \cos \theta (1 - \frac{1}{2} (V^2_{11})^2) - \frac{1}{2} \sin \theta V^2_{11} V^1_{11} \} \right. \\ & - \{ \theta_{,1} V^3_{11} + K_2 V^2_{11} V^1_{11} + K_3 (V^2_{11})^2 \} \omega \left. \right] \hat{e}_3. \quad (12) \end{aligned}$$

得られた有限変位場と従来の研究との比較を表1に示す。

表 1

分類	対象部材	曲率	換率	研究者	本文との関係
微小変位場	平面曲線部材	曲率=0	換率=0	Kollbrunner ⁴⁾ Hajdin	(12)式において $K_1=K_2=K_3=0$ とし、変位成分について線型項のみをとると本文の結果と全く一致する。
		曲率=const	換率=0	西野文雄 ⁵⁾ 深沢泰晴	(12)式において $K_1=K_2=0$ とおき、変位成分の線型項のみを考慮すれば、本文の結果と一致する。ただし、文献(5)とは変位を規定する軸を棒軸にとった場合で比較している。
	空間曲線部材	曲率=const	換率=const	築地恒夫 ⁶⁾	(12)式において $K_1=const., K_2=const., K_3=const.$ とし、変位成分の線型項のみをとると本文の結果と一致する。ただし、より関数 ω を求める際に近似 ($g \div g_0$) を行っている。
		曲率+const	換率+const	K. Washizu ⁷⁾	(12)式において変位成分の線型項のみをとれば本文の結果と一致する。ただし、文献(7)ではより関数として直線部材の St. Venant ナトリのより関数を用いている。
有限変位場	平面曲線部材	曲率=0	換率=0	西野文雄 ¹⁾ 倉方慶夫 長谷川彰夫 奥村敏忠	(12)式において $K_1=K_2=K_3=0$ とおき、回転角 θ を除く変位成分について2次以上の高次微小項を省略すれば本文の結果と一致する。
				前田幸雄 ⁸⁾ 林正	$K_1=K_2=K_3=0$ とおき、(7)式において θ の項を無視し、 $D_{im} = \bar{D}_{im}$ ($\bar{D}_{im} = r_{im}, e_1 = \phi_x = \theta x/a, e_2 = \phi_y = \theta y/a, e_3 = \phi_z = \theta z/a$) とおけば、本文の結果と完全に一致する。
		曲率=const	換率=0	西野文雄 ⁹⁾ 倉方慶夫 後藤芳顕	$K_1=K_2=K_3=0$ とおき、(7)式の θ の項を無視し、(7)式の D_{im} を計算する際 $e_1=0, e_2=1, e_3=0, \theta=0$ とおけば、本文の結果と完全に一致する。
				薄木征三 ¹⁰⁾	面内変位については文献(4)と同じものを用い、軸方向変位(面外)の変位成分に関し回転角 θ を除き2次以上の高次微小項を無視し、(11)式より θ の換率を求める際 $D_{22}=D_{33}=1, D_{23}=D_{32}=0$ とおけば一致。
	空間曲線部材	曲率+const	換率+const	倉方慶夫 ¹¹⁾	(7)式から(12)式を導く際、 $K_1=K_2=0$ とおき、 $\cos \alpha \div 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha$ と近似すれば、本文の結果と一致する。
				車口孝男 ¹²⁾ 久保元生 中井博	(12)式において $K_1=K_2=0$ とおき、変位成分に関し3次以上の高次微小項を省略すると本文の結果と一致する。ただし、文献(12)とは換率の項の係数に相違がある。
	空間曲線部材	曲率+const	換率+const	Schroeder ²⁾	(12)式において、平面的な変位は一致するが、 θ の項に差がある。すなわち、文献(2)では換率として微小変位理論に基づく直線部材の換率 ($\theta_{,1}$) を用いている。
				高島秀雄 ¹³⁾	θ の項に對し初期曲率・初期換率の影響を考慮しているが、本文の換率に對應するものとして新しい変数 (α) を導入し、より関数として直線部材の St. Venant ナトリのより関数を代用している点に差がある。

3. あとがき

ここで誘導した有限変位場は必ずしも厳密ではないが、従来の研究成果を含むものであり、より一般的な有限変位場であると考えられる。

参考文献

- 1) 西野・倉方・長谷川・奥村：土木学会論文報告集，No. 225, 1974.5.
- 2) F. H. Schroeder: Ingenieur-Archiv, 39. Band 1970.
- 3) M. Hirashima & M. Iura: 早稲田大学理工学研究所報告，No. 79, 1977.12.
- 4) C. F. Kollbrunner & N. Hajdin: Dünnwandige Stäbe, Springer-Verlag, 1972.
- 5) 西野文雄・深沢泰晴：土木学会論文報告集，No. 247, 1976.3.
- 6) 築地恒夫：土木学会論文報告集，No. 230, 1974.10.
- 7) K. Washizu: Jour. of Math. and Phys. Vol. 43, No. 2, 1964.
- 8) 前田幸雄・林正：土木学会論文報告集，No. 253, 1976.9.
- 9) 西野・倉方・後藤：土木学会論文報告集，No. 237, 1975.5.
- 10) 薄木征三：土木学会論文報告集，No. 263, 1977.7.
- 11) 倉方慶夫：東京大学工学系研究科博士論文，1976.3.
- 12) 車口・久保・中井：第24回構造工学シンポジウム，1978.2.10.
- 13) 高島秀雄：第27回応用力学連合講演会議演論文抄録集，1977.11.