

○ 豊田高孝 正員 桜井孝昌
東京大学 正員 西野文雄

まえがき 本報告はKirchhoff-Loveの仮定のもとにシェルの幾何学的非線形理論を誘導したものである。一般にシェルの有限変位理論は煩雑で、このことが式の誘導過程を理解しにくくしている一因となっている。また、厳密な構成方程式が得にくいことも指摘されている^{1,2)}。本報告ではシェルの有限変位理論をできる限り簡明に表現し、その本質が明確になるよう配慮した。式の誘導にはテンソルの手法³⁾を用い、変形前と後のテンソル諸量を同じ形式で表わし式の単純化を計した。

シェルの有限変位解析

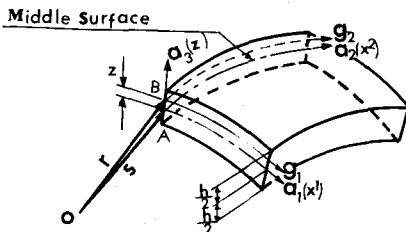


Fig. 1 Shell Element

(1) 歪の計量テンソル、曲率テンソルによる表示

原点Oよりシェル中央面上の任意の点Aまでの距離を δ 、その面に垂直でその点からZだけ離れた点Bまでの距離を r とする。中央面およびその面に平行で点Bを通る曲面を表わす基底ベクトルは、座標系を (x, z) とすると(Fig. 1参照)次式のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} a_\alpha &= \partial \delta / \partial x^\alpha = \delta_{,\alpha} \\ r &= \delta + Z a_3 \\ g_\alpha &= r_{,\alpha} = a_\alpha + Z a_{3,\alpha} \\ g_3 &= a_3 \end{aligned} \right\} (1.1, a, b, c, d)$$

a_3 は a_α と直交した単位ベクトルである。曲面の幾何学より

$$a_{3,\alpha} = -b_\alpha^\beta a_\beta \quad b_\alpha^\beta: \text{曲率テンソル} \quad (1.2)$$

(1.1c), (1.2)より δ_β^α をクロネッカーデルタとして

$$g_\alpha = (\delta_\alpha^\beta - Z b_\alpha^\beta) a_\beta = \mu_\alpha^\beta a_\beta \quad (1.3)$$

以上の式において、ギリシャ文字 α, β は面内量に関する添字で1, 2を表わす。添字については松和理約

を適用する。

変形後の諸量については、記号の上に“ $\hat{}$ ”をつけて表わす。Kirchhoff-Loveおよび板厚不変の仮定のもとに変形を考えるものとする。それぞれの仮定は、

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathbf{g}}_\alpha \cdot \hat{\mathbf{g}}_\beta &= \hat{g}_{\alpha\beta} = 0 \\ |\hat{\mathbf{g}}_3| &= 1 \end{aligned} \right\} (1.4, a, b)$$

で表わされる。歪テンソルは中央面に関する計量テンソルと曲率テンソルにより、次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{e}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\hat{a}_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}) - Z(\hat{b}_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}) + Z^2(\hat{b}_{\alpha\gamma} \hat{b}_{\beta\gamma} - b_{\alpha\gamma} b_{\beta\gamma}) \\ \hat{e}_{33} &= \hat{r}_{33} = 0 \end{aligned} \right\} \text{with (1.5, a, b)}$$

(2) フリオリ式

変形後の単位面積当りに作用する応力テンソル σ_{ij} 、変形後の微小体積 $d\hat{V}$ とすると、3次元物体内の微小体積に関するフリオリ式は、

$$(\sigma_{ij} \hat{g}_j)_{,i} d\hat{V} + \bar{X}^k \hat{g}_k d\hat{V} = 0 \quad (2.1)$$

$$\left. \begin{aligned} d\hat{V} &= \sqrt{\hat{a}} \hat{\mu} dx^1 dx^2 dz \\ \hat{\mu} &= |\hat{\mu}_j^i| = \left| \begin{matrix} \hat{\mu}_1^1 & \hat{\mu}_1^2 \\ \hat{\mu}_2^1 & \hat{\mu}_2^2 \end{matrix} \right| \\ \sqrt{\hat{a}} &= |\sqrt{\hat{a}_{ij}}| \quad (i, j = 1, 2, 3) \\ \bar{X}^k &= \sqrt{\hat{a}} / \sqrt{a} \hat{X}^k = C X^k \quad (k=1, 2, 3) \end{aligned} \right\} (2.2, a, b, c, d)$$

上式において $\hat{X}^k$ および $\bar{X}^k$ はそれぞれ変形前および変形後の単位体積当りに作用する物体力である。式(2.1)をZに関して $-\frac{1}{2} \sim \frac{1}{2}$ で積分すると次式となる。

$$\left. \begin{aligned} (\hat{N}^{\alpha\beta} a_\beta + \hat{Q}^{\alpha 3} \hat{b}_\alpha + \hat{P}^\alpha) \hat{a}_\alpha + (\hat{N}^{\alpha\beta} \hat{b}_{\alpha\beta} - \hat{Q}^{\alpha 3} \hat{b}_\alpha + \hat{P}^\alpha \hat{a}_\alpha + \hat{P}^3 a_3) &= 0 \\ \hat{N}^{\alpha\beta} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sigma^{\alpha\beta} \hat{\mu} \hat{\mu}_3^\beta dz \\ \hat{Q}^{\alpha 3} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sigma^{\alpha 3} \hat{\mu} dz \end{aligned} \right\} (2.3, a, b, c)$$

上式において、 $\hat{P}^\alpha, \hat{P}^3$ はシェル表面に作用する外力であり P^α, P^3 は物体力、“ $\parallel$ ”は面内共変微分を表わす記号である。

$\hat{a}^\alpha$ 方向のモーメントに関するフリオリ式をつくるため、式(2.1)と $Z \hat{a}_3$ との外積をつくり、Zに関して積分する。

$$\left. \begin{aligned} (-\hat{M}^{\alpha\beta} a_\beta - \hat{Q}^{\alpha 3} + \hat{M}_\alpha) \hat{a}^\alpha &= 0 \\ \hat{M}^{\alpha\beta} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sigma^{\alpha\beta} \hat{\mu}_3^\beta \hat{\mu} Z dz \end{aligned} \right\} (2.4, a, b)$$

ただし上式の $\hat{M}_\alpha$ は外力によるモーメントを表わす。

Z方向のモーメントのつりあひ式は、3次元微小要素のモーメントのつりあひより、

$$\sigma^{00} = \sigma^{00}$$

これを書き直してZに関して積分する、

$$\int_{-h/2}^{h/2} \hat{e}_{00} \hat{\mu} \sigma^{00} dZ \hat{a}_2 = \hat{e}_{00} (\hat{N}^{00} + \hat{b}_p \hat{M}^{00}) \hat{a}_2 = 0 \quad (2.4C)$$

ただし $\hat{e}_{00}$ は $\hat{a}_2$ 系における交代テンソルである、

(2.4C) は 応力テンソルの対称性と等価なものであることから恒等式である、

(3) 境界条件

曲面上の任意の境界線を表わす基ベクトルを $\hat{a}_2$ としこれと直交する基ベクトルを $\hat{a}_1$ とする、境界線を含んで中央面に垂直な変形後の断面(境界線断面)に作用する単位面積当りの外力を $\bar{T}$ とする、

$$\bar{T} = \bar{T}^* \hat{a}_1 = C T^* \hat{a}_1 \quad (3.1)$$

上式の T^* および $\bar{T}^*$ はそれぞれ変形前および変形後の面積に作用する単位面積当りの外力である、上式の外力をZに関して積分し、中央面における合力および合モーメントを求める、これらと応力による合力、合モーメントが等しいとして、力学的境界条件が求まる、この場合、合モーメントのうち $\hat{a}_2$ 方向のモーメント(ゆがみモーメント)を合力に置換する必要がある、幾何学的境界条件は、以上の力と対になる変位および回転が定まる、力学的境界条件は次式となる、

$$\left. \begin{aligned} \hat{P}^{ij} \hat{a}_j^i &= \bar{P}^{ij} \hat{a}_j^i \\ \hat{L}_{12} &= \hat{L}_{12} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.a.b)$$

上式の $\hat{P}^{ij}$, $\hat{L}_{12}$ は境界線断面上の応力による合力および合モーメントであり、 $\bar{P}^{ij}$, $\hat{L}_{12}$ は外力 $\bar{T}$ によるものである、さらに $\hat{a}_j^i$, $\hat{a}_j^i$ は変形前の方向における関係式にするための計量テンソルである、

境界線上の強制変位および強制回転量をそれぞれ $\bar{u}_0$, $\bar{\Omega}_0$ とし、次のように定義する、

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_0 &= \bar{u}_0^i \hat{a}_i \\ \bar{\Omega}_0 &= \bar{\Omega}_0^i \hat{a}_i + \bar{\Omega}_0^j \hat{a}_j \end{aligned} \right\} \quad (3.3.a.b)$$

境界線上の変位 $\bar{u}_0^i$, 回転 $\bar{\Omega}_0^i$ に関する幾何学的境界条件は次式となる、

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_0^i &= \bar{u}_0^i \\ \bar{\Omega}_0^i &= \bar{\Omega}_0^i \end{aligned} \right\} \quad (3.4.a.b)$$

(4) 構成方程式

等方弾性体の応力-歪関係は、ヤング係数E, ポアソン比 ν とすると次式となる、

$$E \gamma_{ij}^e = (1+\nu) \sigma_{ij}^e - \nu \sigma_{kk}^e \delta_{ij}^e \quad (4.1)$$

平面応力状態を仮定して、次式の条件を導入する、

$$\sigma_{33}^e = \sigma_{3j}^e = \sigma_{j3}^e = 0 \quad (4.2)$$

(4.1), (4.2) を用いて σ_{ij}^{00} を計算し, (2.3b), (2.4b) に代入する、

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{N}^{00} \\ \hat{M}^{00} \end{aligned} \right\} = \frac{E}{1-\nu^2} \hat{a}^{00} \hat{a}^{00} \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ (1-\nu) \hat{\sigma}_p^e \hat{\gamma}_{\mu}^e + \nu \hat{\sigma}_p^e \hat{\gamma}_{\mu}^e \right\} \times \hat{\gamma}_{20} \hat{\gamma}_p^e \hat{\gamma}_\mu^e \hat{\mu} \left\{ \begin{aligned} 1 \\ -Z \end{aligned} \right\} dZ \quad (4.3.a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{a}^0 \\ \hat{\gamma}_0^e \end{aligned} \right\} = \left\{ \begin{aligned} \hat{\gamma}_p^e \hat{a}^p \\ \hat{\sigma}_p^e + \hat{b}_p^e Z + \hat{b}_p^e \hat{\gamma}_p^e Z^2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.3.b.c)$$

以上の式を用いて式(4.3a)をZに関して積分すれば構成方程式が求まる、いま ρ を曲面の曲率半径とし、1に対して $(\frac{\rho}{R})^2$ のオーダーの項を省略すると、次式のような形式で構成方程式が求まる、

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{N}^{00} \\ \hat{M}^{00} \end{aligned} \right\} = \frac{E}{1-\nu^2} \hat{a}^{00} \hat{a}^{00} \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{12} I_3 \\ - \frac{1}{12} I_2 \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

おわりに

○変形後のシェルに関するテンソル量を“ $\hat{}$ ”を付して表わし、変形前と全く同じ扱いができることを利用して式を誘導した、さらに3次元微小要素に関するつりあひ式や境界条件を、Zに関して積分することにより中央面の合力で表わした諸式を求めた、このことが正エネルギー法を用いた方法に比較して、式の誘導過程を簡明にできた主な原因にあると考えられる、

○一般に未知量として中央面上の変位を用いる場合が多いが、本報告では変形後の中央面の計量テンソルおよび曲率テンソルを未知量としている、これらの未知量は変位によっても、変形後の位置によっても表わすことができるので、必要な未知量に従って式の変形が容易にできる、

○(2.3b.c)の合力と応力テンソルの関係は、3次元微小要素のつりあひ式とZに関して積分した式より定義したものである、従ってこの式を正確に計算することにより厳密な構成方程式が得られる、

参考文献

- 1) P. Seide, Int. J. Non-Linear Mech. Vol. 6, pp. 361-376, 1971
- 2) R.M. Naghdi and R.P. Nordgren, Q. appl. Mech. 21, pp. 69-79, 1963
- 3) W. Flügge, Tensor Analysis and Continuum Mechanics, Springer-Verlag, 1972.