I-46　　積分方程式法による弾塑性解析

京都大学大学院　学生員　　西村直志
京都大学工学部　正員　　小林昭一

1　序

積分方程式法は，線形弾性学の境界値問題，特に外部問題の数値解析手法として，非常に有効である事が知られている．最近は動弾性学，熱弾性学，粘弾性学へも適用されているが，非線形問題への応用例は少なく，必ずしも十分とは言えない．本研究は，積分方程式法の１つである一重層ポテンシアル法と，仮想物体力の考え方を結合し，増分理論による弾塑性応力境界値問題を解く手法を示し，合わせて２，３の数値計算例を示したものである．

2　定式化

以下では均質な等方完全弾塑性体を扱う．降伏条件は von Mises とする．増分理論による弾塑性問題は，一般に塑性ひずみ増分を仮想物体力におきかえる事によって，線形弾性学の問題に帰着する事ができる．実際，弾性学のオペレータ $\boldsymbol{\Delta}^* \equiv \mu \boldsymbol{\Delta} + (\lambda+\mu)\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot$ を用いると

$$\boldsymbol{\Delta}^* d\boldsymbol{u} - 2\mu\, d\boldsymbol{\epsilon}^p \cdot \boldsymbol{\nabla} = 0 \tag{1}$$

となる．$d\boldsymbol{u}$ は変位増分，$d\boldsymbol{\epsilon}^p$ は塑性ひずみ増分，λ，μ は Lamé　常数である．それゆえ次の様な変位増分場を仮定する事は妥当である．

$$d\boldsymbol{u} = \int_{\partial D} \boldsymbol{\Gamma}\cdot\boldsymbol{\varphi}\, dS + \int_D \boldsymbol{\Gamma}\cdot\boldsymbol{\psi}\, dV \tag{2}$$

ここに $\boldsymbol{\Gamma}$ は無限弾性体の Green tensor，$\boldsymbol{\varphi}$，$\boldsymbol{\psi}$ はある密度である．つりあい式(1)を用いれば，

$$\boldsymbol{\psi} + 2\mu\, d\boldsymbol{\epsilon}^p \cdot \boldsymbol{\nabla} = 0 \tag{3}$$

が物体内で成立する．なお，注意すべき事は弾塑性境界の取扱いである．そこでは少々の極限計算により(3)から

$$\boldsymbol{\psi}_B + 2\mu\, d\boldsymbol{\epsilon}^p \cdot \boldsymbol{n} = 0 \tag{4}$$

が成立する事が従う．ここに $\boldsymbol{\psi}_B$ は，弾塑性境界に分布させるべき一重層密度である．$\boldsymbol{n}$ は，弾塑性境界に立てた単位法線ベクトルであり，弾性側から塑性側に向かっている．もちろん $d\boldsymbol{\epsilon}^p$ は塑性域内部から弾塑性境界へと極限移行した値である．従って(2)式は厳密には

$$d\boldsymbol{u} = \int_{\partial D} \boldsymbol{\Gamma}\cdot\boldsymbol{\varphi}\, dS + \int_D \boldsymbol{\Gamma}\cdot\boldsymbol{\psi}\, dV + \int_{\partial D^{EP}} \boldsymbol{\Gamma}\cdot\boldsymbol{\psi}_B\, dS \tag{5}$$

と書かれる．∂D^{EP} は弾塑性境界である．なお，(5)式は一重層の連続性を考慮すれば，いたる所連続であり，弾塑性境界の一種の Singular　Surface としての性質をも表現している．以上の結果を流れ則

$$d\boldsymbol{\epsilon}^p = \boldsymbol{\tau}'\ \mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau}'\cdot d\boldsymbol{\epsilon}) / (2\sigma_y^2/3) \tag{6}$$

及び(5)式を用いて表現し，境界条件

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{t}(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \boldsymbol{n}\cdot(\lambda \mathbf{1}\ \mathrm{tr}(A\, d\boldsymbol{u}(x)) + 2\mu A\, d\boldsymbol{u}(x)) && x_0 \in \partial D^E \\ d\boldsymbol{t}(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \boldsymbol{n}\cdot(\lambda \mathbf{1}\ \mathrm{tr}(A\, d\boldsymbol{u}(x) - d\boldsymbol{\epsilon}^p(x)) + 2\mu(A\, d\boldsymbol{u}(x) - d\boldsymbol{\epsilon}^p(x))) && x_0 \in \partial D^P \end{aligned} \tag{7}$$

と連立して解けば，求める変位場が得られ，それから応力場が計算される．ここに $d\boldsymbol{t}$ は与えられた境界での表面力増分，A はひずみ化オペレータ　$A \equiv (\boldsymbol{\nabla} + \boldsymbol{\nabla}^T)/2$　である．

3　数値計算手法

上述の手法は平面ひずみ問題に次の様にして適用される．考える物体の境界を有限個の線分の集合としてモデル化する．また物体中の降伏しそうな部分を有限個の多角形の集合としてモデル化する．次に，(5)に現れる密

度を，各要素内で一定と仮定する．以上のモデル化により(3)，(4)，(7)式を離散化し，選点法によればφ，ψ，ψ_Bに関する連立一次方程式になる事が容易にわかる．なお降伏は物体要素の図心にとった代表点で判定し，弾塑性境界は物体要素の境界で代用する．この様にして通常の増分計算を行なうとよい．この定式化によれば，FEMなどと異なり一階高階の微分計算を行なう必要がある((3)式)．従ってポテンシアル論に於いてよく知られている様に，微積分の順序に注意する必要がある．この問題を回避するために，ここでは一般の物体要素位置に対して$\int \Gamma \, dV$の計算を厳密に行なった．なお境界条件の正確な算定のために，一重層ポテンシアルの項も厳密に積分を行なった．従って，数値積分は一切用いていない．最後に，3次元問題も同様の手法で解析し得る事を指摘しておく．

4　数値解析例

以下では，上述の手法によって解析した結果について述べる．まず，Trescaの条件の下で解析解の知られている円孔の押拡げについて解析した．図1は，使用したモデルである．実際には点対称問題として扱っており，図に示したものの倍の自由度を有した問題としている．従って境界要素が12，物体要素が48，及び弾塑性境界要素が用いられている．図2は解析結果である．$\tau_{\theta\theta}$についてプロットした．最も降伏の進んだものについては多少精度が悪いが，これはこのケースのみ荒いメッシュを用いた事が原因である．なお$\sigma_y = 2500$ kg/cm^2，$E = 2100000$ kg/cm^2，$\nu = 0.3$とした．また，Trescaの条件によった解析解と，von Misesの条件による結果に大差がないであろう事もよく知られている．

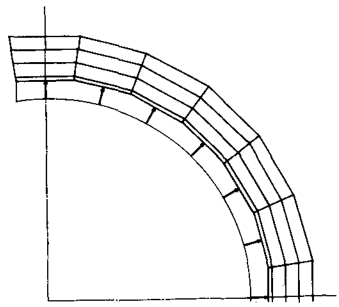

図 1

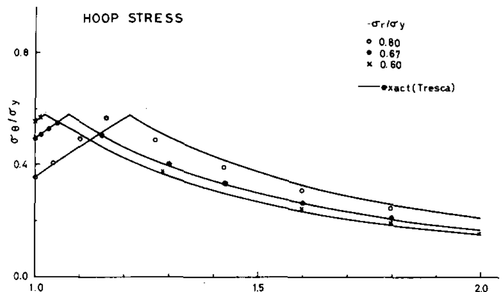

図 2

次に，クラックの問題への適用例について述べる．図3は使用したモデルを示す．一般に，一重層による定式化では若干の開口を必要とするので，やや非現実的ではあるが半長5cm，開口は中央で3mmとした．また図3に於けるループはJ積分の算定に用いたループである．なお，材料常数は前述の通りである．図4に得られたJ積分値をそのままプロットした．実線はDugdale-Modelによる結果である．計算結果は若干の過小評価である．これは主としてクラックのモデルとして有限の開口を有したものを用いた事に原因があるものと考えている．

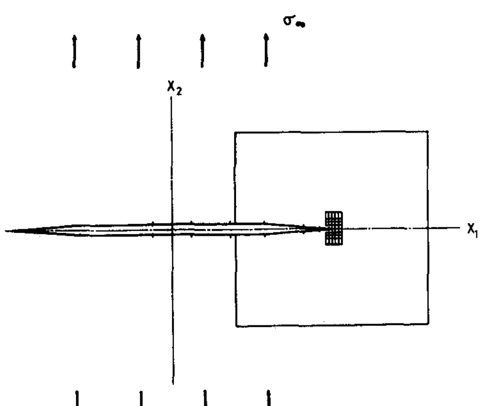

図 3

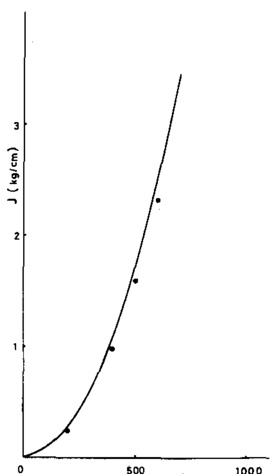

図 4

その他の結果は当日示す．