I-45　　積分方程式法の非線形解析への適用

福井大学工学部　正員　福井卓雄

積分方程式法が種々の線形境界値問題を解析する数値解析法として有用であることは種々議論され，その基本的特性についてもかなり明白となってきた。その特性を挙げてみると，

(1) 未知量を境界上でだけ選べば良い。

(2) 素解がもとの場の方程式を満足することおよび一般に非常になめらかな関数であること等から，他の数値解析法と比較して一般に高精度である。

(3) 特異性をもつ解を重ね合せているために，種々の特異性を十分に近似できる。一方，その数値的な扱いには困難さも伴う。

のようである。これらの基本的性格から帰結されることとして，非常に高精度の数値解を得る可能性があること，またはそれと同等であるが，数値的取扱における未知数の数が少なくてすむ（自由度が少なくてすむ）ということが最も大きな特徴といえよう。

さて，積分方程式法を用いて非線形問題を解析する場合の方法およびその問題点について考える。領域 D およびその境界 ∂D において，線形境界値問題

$$\mathbb{L}u = -f \quad \text{in } D, \qquad \mathbb{B}u = g \quad \text{on } \partial D \tag{1}$$

に対し，積分方程式法では解を

$$u(x) = \int_{\partial D} G(x;\xi)\varphi(\xi)\,dS_\xi + \int_D F(x;y)f(y)\,dy \tag{2}$$

の形で求める。即ち，境界上の密度関数 $\varphi(\xi)$ を境界条件から決定して解を定める。一方，非線形問題

$$\mathbb{N}[u] = -f \quad \text{in } D, \qquad \mathbb{B}u = g \quad \text{on } \partial D \tag{3}$$

の場合には，一般には式(2)の様な重ね合せの表現はできない。しかしながら，もし非線形作用素 $\mathbb{N}$ が線形作用素 $\mathbb{L}$ を用いて

$$\mathbb{N}[u] = \mathbb{L}u + \mathbb{M}[u]$$

と書けるならば，u^* を式(3)の解であるとすると u^* は

$$\mathbb{L}u^* = -f - \mathbb{M}[u^*] = -f^*[u^*] \quad \text{in } D, \qquad \mathbb{B}u^* = g \quad \text{on } \partial D \tag{4}$$

を満足する。f^* が定まれば，式(4)は式(1)とまったく同等であり，式(4)に対する解の積分表現として

$$u^*(x) = \int_{\partial D} G(x;\xi)\varphi(\xi)\,dS_\xi + \int_D F(x;y)f^*[u^*](y)\,dy \tag{5}$$

を用いてもよいであろう。式(2)の体積分項が未知関数を含まないのに対して，式(5)では体積分項の密度関数もまた未知関数となることが最も大きな特徴であり，非線形問題を積分方程式法で扱う場合には，問題の非線形性は体積分項の未知関数の決定に要約されることがわかる。

式(5)の形で解を求める場合に，主な問題点として次の二点が考えられる。オ一に，どのような方法で f^* を決定するか，オ二に，式(5)は体積分項の中に未知関数を含むが，このような項を含んでいてもなお前述の積分方程式法としての特徴を保存できるのか，である。ここでは主としてオ一の問題について考察する。オ二の点についてはむしろ種々の試行を経た上で評価されるべきものであろう。

f^* を決定するにあたって，まず考慮すべきことは，式(5)の様に線形問題の解を重ね合せて非線形問題の解を作り出す場合には，常に何らかの繰返し計算を必要とするという解析法上の基本的性質であろう。その場合に繰返し計算が必ず収束するという保証，および，繰返し計算で収束した解が（解析的には）必ず正解であると

いう保証が必要である。さらに，近似を導入したときにその近似の程度を評価できるような方法であれば望ましい。ここでは，これらの要求を満足する一つの方法として変分不等式を用いて，f^* を決定する方法を定式化することを試みる。変分不等式とは変分問題と同様にある汎関数を最小にする問題で，汎関数を最小にすべき関数の含まれる空間がある制限を受けている場合に生ずるものである。[1]

最も簡単な例として，断面一様の棒の弾塑性ねじり問題を考える。棒は完全弾塑性体であり，降伏条件は von Mises の条件に従うとする。棒の軸方向に z 軸を，断面内に xy 軸をとり，断面内で応力関数 $u(x)=u(x,y)$ （$\tau_{xz}=\partial u/\partial y$, $\tau_{yz}=-\partial u/\partial x$）を定義する。このとき降伏条件は $\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2=k^2$ 即ち，$|\mathrm{grad}\,u|=k$ となる。z 軸まわりのねじり率 θ が与えられたとき，弾塑性ねじりの境界値問題は次のようになる。

弾性域で $\Delta u=-2G\theta$, $|\mathrm{grad}\,u|<k$, 塑性域で $|\mathrm{grad}\,u|=k$ in D (6)

境界上で $u=0$

ここに，G はせん断弾性定数，Δ は Laplace 作用素 を表わす。

上の問題は次のように変分不等式を用いて表わせる。[2] 即ち，与えられた $f(=2G\theta)\in H^{-1}(D)$ に対して，$u\in K=\{v \mid v\in H_0^1(D),\ |\mathrm{grad}\,v|\leq k\ \text{a.e. in}\ D\}$ を次の式を満足するように決める。（$H^{-1}(D)$, $H^1(D)$ 等は領域 D 上の Sobolev 空間であり，$H_0^1(D)=\{u \mid u\in H^1(D),\ u=0\ \text{on}\ \partial D\}$。）

$$\int_D \mathrm{grad}\,u\cdot\mathrm{grad}(v-u)\,dx \geq \int_D f(v-u)\,dx, \qquad \forall v\in K. \tag{7}$$

K は $H_0^1(D)$ の凸閉集合であり，左辺の双線形汎関数は $H_0^1(D)$ で連続かつ coercive である。このことを条件として，上の不等式には一意の解が存在し，縮小写像 T により $u=Tu$ の解と同じになる。ここに，

$$Tu = P_K(u-\rho(\Delta u+f)) \tag{8}$$

であり，ρ は左辺の双線形汎関数の性質から導かれる正の数である。また P_K は $H_0^1(D)$ から K への写影であり，この場合には D 上の関数 $\Phi(x)=k\,\mathrm{dist}(x,\partial D)$（$\mathrm{dist}(x,\partial D)$ は x と境界との距離）を導入すれば条件 $|\mathrm{grad}\,u|\leq k$ は $u\leq\Phi$ と等価になるから，$P_K(u)=\mathrm{Min}\{\Phi,u\}$ と考えられる。即ち，$\forall u^{(0)}\in H_0^1(D)$ に対して，繰返し操作

$$u^{(n+1)}=\mathrm{Min}\{\Phi,\ u^{(n)}-\rho(\Delta u^{(n)}+f)\} \tag{9}$$

により $u^{(1)}, u^{(2)}, \cdots$ を作れば，繰返しの極限として解 $u(x)$ が得られる。

さて，式(5)の f^* の決定過程だけに注目できるように，解を

$$u(x)=u_0(x)+\int_D G(x;y)p(y)\,dy = u_0(x)+\mathbb{K}[p](x) \tag{10}$$

で表わす。ここに，u_0 は対応する弾性問題の解であり，$G(x;y)$ は領域 D に対する Green 関数である。（$\Delta G(x;y)=\delta(x-y)$, $x,y\in D$, $G(\xi;y)=0$ $\xi\in\partial D$）これらは線形問題の解であるから，いずれも積分方程式法により解いて得ることができる。また，式(4),(5)を参照すれば，$p(x)=-\mathbb{M}[u](x)$ となっている。$u_0(x)$ は確定されているから，$u(x)$ は領域内の密度関数 $p(x)$ のみに依存する。すなわち，式(9)より，$p(x)$ に関する繰返し操作を導けばよい。

$$u_0+\mathbb{K}[p^{(n+1)}]=\mathrm{Min}\{\Phi,\ u_0+\mathbb{K}[p^{(n)}]-\rho p^{(n)}\} \tag{11}$$

さらに $\Delta p^{(n+1)}=p^{(n+1)}-p^{(n)}$ とおけば，

$$\mathbb{K}[\Delta p^{(n+1)}]=\mathrm{Min}\{\Phi-(u_0+\mathbb{K}[p^{(n)}]),\ -\rho p^{(n)}\}. \tag{12}$$

繰返し操作における $p(x)$ の変化は二重の調節作用にもとづいており，Min{ , } の第一項は u の過大分を，第二項は p の過大分をそれぞれ制御することになる。

（参考文献） (1) Lions, J.L. & Stampacchia, G.: Comm. Pure Appl. Math. 20, 493-519 (1967).

(2) Duvaut, G. & Lions, J.L.: Inequalities in Mechanics and Physics, Springer (1976).