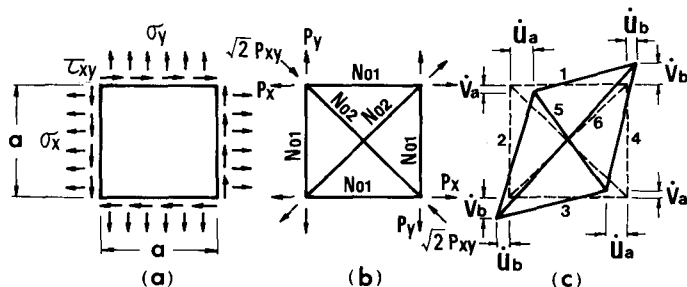


大阪市立大学工学部 学生員 前田 孝士
大阪市立大学工学部 正員 園田 恵一郎

1. トレスカの降伏条件に対するトラス相似による近似

図・1(b)の正方形トラスの各部材は降伏強度 No_1 , $No_2 = \sqrt{2} No_1$ を持つ完全塑性材料からできているとすれば, このトラスの塑性崩壊曲面; $F(P_x, P_y, P_{xy}) = 0$ は極限解析法の Static Theorem により次の線形計画の問題の解として得られる。



図・1 トラス相似

$$\left. \begin{aligned} & \text{maximize} \quad \lambda P_x + \mu P_y + \varepsilon P_{xy} \\ & \text{subjected to} \\ & \left. \begin{aligned} & s_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} s_5 = P_x - P_{xy}, \quad s_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} s_6 = P_x + P_{xy}, \quad s_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} s_5 = P_y - P_{xy}, \quad s_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} s_6 = P_y + P_{xy}, \\ & s_1 = s_3, \quad s_2 = s_4, \quad |s_1 - s_2| + \frac{\beta}{\sqrt{2}} |s_6 - s_5| \leq 2 No_1, \quad |s_1| \leq No_1, \quad |s_2| \leq No_1, \quad |s_5| \leq No_2, \quad |s_6| \leq No_2 \end{aligned} \right\} \quad (1) \end{aligned} \right\}$$

ここに s_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) は部材力, $\lambda, \mu, \varepsilon$ は任意の定数である。

図・1(a)の連続体要素の降伏応力を σ_0 とし,

$$No_1 = a \sigma_0 / 4, \quad P_x = \sigma_x a / 2, \quad P_y = \sigma_y a / 2, \quad P_{xy} = \tau_{xy} a / 2 \quad (2)$$

と置けば, 上記の問題の解は図・2に示す曲面になる。式(1)における水平材, 垂直材, 斜材の相対降伏条件式の係数; $\beta = 1$ とすれば, この曲面はトレスカの降伏条件式; $f(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 0$ の下界式となる。

次に極限解析法の Kinematic Theorem から同じ問題を考える。連続体要素の塑性ひずみ速度 $(\dot{\varepsilon}_x, \dot{\varepsilon}_y, \dot{\gamma}_{xy})$ とトラス崩壊時の変形速度 $(\dot{\delta}_x, \dot{\delta}_y, \dot{\delta}_{xy})$ の関係を

$$\dot{\varepsilon}_x = \dot{\delta}_x / a = (\dot{u}_b - \dot{u}_a) / a, \quad \dot{\varepsilon}_y = \dot{\delta}_y / a = (\dot{v}_b - \dot{v}_a) / a, \quad \dot{\gamma}_{xy} = \dot{\delta}_{xy} / a = (\dot{u}_a + \dot{v}_a + \dot{u}_b + \dot{v}_b) / a \quad (3)$$

と置けば, 図・2の $F(P_x, P_y, P_{xy}) = 0$ は次式の問題の解によって得られる。

$$\left. \begin{aligned} & \text{minimize} \quad \frac{No_1 [2(\lambda_1^+ + \lambda_1^- + \lambda_2^+ + \lambda_2^-) + \sqrt{2}(\lambda_5^+ + \lambda_5^- + \lambda_6^+ + \lambda_6^-) + 2(\lambda_{11}^+ + \lambda_{12}^+ + \lambda_{13}^- + \lambda_{14}^-)]}{2(P_x \dot{\delta}_x + P_y \dot{\delta}_y + P_{xy} \dot{\delta}_{xy})} \\ & \text{subjected to} \\ & \left. \begin{aligned} & \dot{\delta}_1 = \lambda_1^+ - \lambda_1^- + \lambda_{11}^+ + \lambda_{12}^- - \lambda_{13}^- - \lambda_{14}^-, \quad \dot{\delta}_2 = \lambda_2^+ - \lambda_2^- - \lambda_{11}^+ - \lambda_{12}^+ + \lambda_{13}^- + \lambda_{14}^- \\ & \dot{\delta}_5 = \lambda_5^+ - \lambda_5^- + \lambda_{11}^+ + \lambda_{12}^- - \lambda_{13}^- - \lambda_{14}^-, \quad \dot{\delta}_6 = \lambda_6^+ - \lambda_6^- - \lambda_{11}^+ - \lambda_{12}^+ + \lambda_{13}^- + \lambda_{14}^- \\ & \dot{\delta}_x = \dot{\delta}_1 = \dot{u}_b - \dot{u}_a, \quad \dot{\delta}_y = \dot{\delta}_2 = \dot{v}_b - \dot{v}_a, \quad \dot{\delta}_{xy} = (\dot{\delta}_6 - \dot{\delta}_5) / \sqrt{2} = \dot{u}_a + \dot{u}_b + \dot{v}_a + \dot{v}_b, \quad \lambda_1^+, \lambda_1^-, \dots, \lambda_{14}^- \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (4) \end{aligned} \right\}$$

ここに $\lambda_1^+, \lambda_1^-, \dots, \lambda_{14}^-$ は式(1)の部材降伏条件式に対する塑性流れ係数を示す。

一方, 塑性ひずみ速度エネルギー-速度 $\dot{D}$ について考える。式(2), (3)の関係より,

$$\dot{D} = a^2 (\sigma_x \dot{\varepsilon}_x + \sigma_y \dot{\varepsilon}_y + \tau_{xy} \dot{\gamma}_{xy}) = 2 P_x \dot{\delta}_x + 2 P_y \dot{\delta}_y + 2 P_{xy} \dot{\delta}_{xy} \quad (5)$$

図・2の曲面に対する塑性流れ法則は次式を与える。

$$\dot{\varepsilon}_x = d\mu \frac{\partial f}{\partial \sigma_x}, \quad \dot{\varepsilon}_y = d\mu \frac{\partial f}{\partial \sigma_y}, \quad \dot{\gamma}_{xy} = d\mu \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}}, \quad \dot{\delta}_x = d\nu \frac{\partial F}{\partial P_x}, \quad \dot{\delta}_y = d\nu \frac{\partial F}{\partial P_y}, \quad \dot{\delta}_{xy} = d\nu \frac{\partial F}{\partial P_{xy}} \quad (6)$$

ここに $d\mu, d\nu \geq 0$ 。任意のひずみ速度場 $(\dot{\varepsilon}_x, \dot{\varepsilon}_y, \dot{\gamma}_{xy}) = (\dot{\delta}_x, \dot{\delta}_y, \dot{\delta}_{xy}) / a$ における $\dot{D} = \text{const.}$ の曲面, を $\beta = 1$ の場合, を描けば, 図・3のようになる。トラス相似による曲面はトレスカの曲面を

完全に包含しているの、Kinematic Theorem から
 $F(P_x, P_y, P_{xy}) = 0$ は $f(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 0$ の下界式
 であることが判る。

2. 梁の相関曲線および架りの塑性強度解析への応用

図1(b) の正方形トラスを組み合わせて軸力-曲げ
 モーメント相関曲線および せん断力-曲げモーメント
 相関曲線を計算したものが図4である。層数 n を
 大きくすれば、連続体としての相関曲線に近づくことが
 分る。次に架りの塑性強度の計算例を図5、図6
 に示す。層数、径間数もある程度多くすれば、十分
 信頼できる極限荷重が得られることが推察できる。

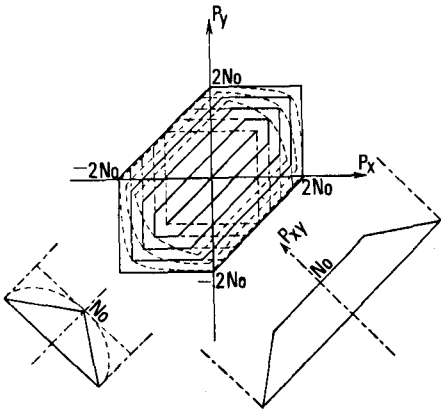


図2 塑性崩壊曲面 (点線はトレスカ,
 実線は $\beta=1.0$, 鎖線は $\beta=0$ の場合)

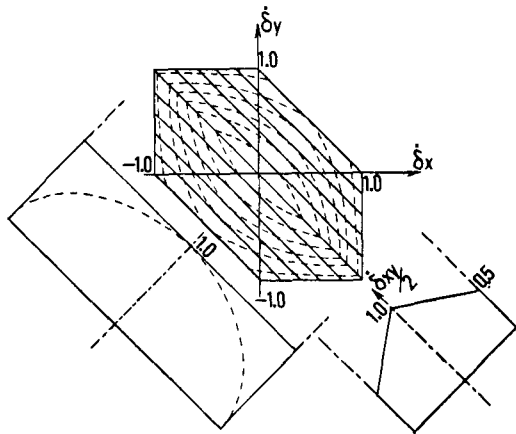


図3 $\dot{D} = \text{Const.}$ 曲面 (点線はトレスカ,
 実線は $\beta = 1.0$ の場合)

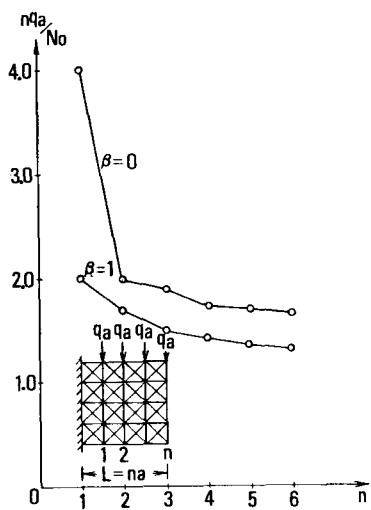


図5 トラス相似による深ばりの極限強度

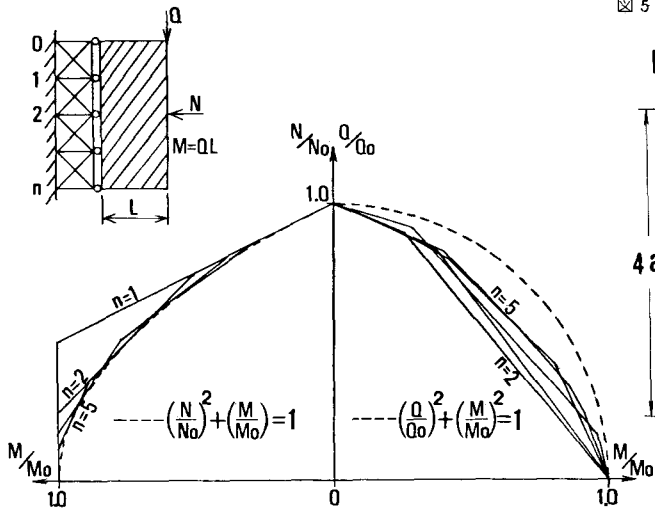


図4 トラス相似 ($\beta = 1.0$) による曲げモーメント-軸力,
 曲げモーメント-せん断力の相関曲線

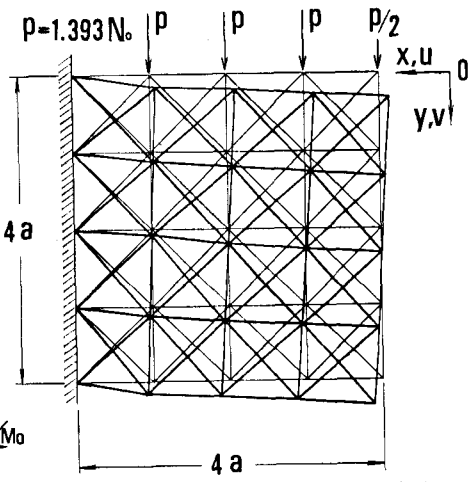


図6 トラス相似 ($\beta = 1.0$) による
 深ばりの崩壊機構