

名古屋工業大学 正員 長谷部宜男

まえがき 複素変数を用いた2次元弾性問題における混合境界値問題の解法が, Muskhelishvili [1] によってなされ, 写像関数が有理関数の場合には, 閉じた解が得られることを示している。しかし彼の解法は, 複素応力関数の1次導関数を用いたランクの解法であるため, その解法は複雑になっている。また変位の計算のためには, これらの関数の積分形を求めなければならないが, これは一般には困難である。Sherman [2, P. 321] は, 複素応力関数のランクの境界条件式を用いて, 写像関数が有理関数である場合には, 閉じた解が得られることを示している。しかし応力関数を求めるための未定定数の決定がかならずしも容易とは思われない。また使用された Plemelj 関数の性質上, 境界条件式から積分定数と変位の連続条件式から決定する必要があるが, これも式の誘導を複雑にしている。本報告は昨年の年次講演会での“混合境界値問題の一解法”と題した報告の延長にあたるもので, 本報告ではより一般の写像関数を用いた解法を示す。ここでは途中の計算の簡化のため境界条件式を少し変えて用いた。さらに外力の与えられた境界と変位の与えられた境界の接点における変位の連続性を満足する Plemelj 関数と始めから選択し, これによって積分定数を省略することができ, 式の誘導が簡単化される。有理写像関数を用いた解法は, 解が閉じた形で得られ, 有理写像関数の表わす形状に対して厳密解である。また一次分数式形の有理写像関数は比較的任意の形状に対して作ることができる。この型の写像関数はクラフツの問題に対しても応用できる。

解法 有理写像関数として物理面上の領域を単位円内に等角写像する次数の ζ -type の写像関数を用いる。

$$Z = \omega(\zeta) = \frac{E_0}{1-\zeta} + \sum_{k=1}^n \frac{E_k}{\zeta_k - \zeta} + E_{-1} \quad (1)$$

上式は, $1/\zeta$ の項によって半無限の領域が表わされる。切欠きや突起を有する半無限領域は式(1)によって表示される。一般の有限領域の場合は, $E_0 = 0$ に, 無限板に孔を有する写像関数は, $1/\zeta$ の項の代りに, 無限遠点に対応する E_0/ζ の項が用いられる。さらに本報告は, 境界上で変位が与えられる部分(M部分とよぶ)と外力が与えられる部分(L部分と呼ぶ)がそれぞれ1ヶ所の場合に限定して話しとする。

複素応力関数 $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ を用いて単位円周上 $\bar{S} = e^{i\theta}$ のL部分の境界条件式は, 次式で与えられる。

$$\varphi(\bar{\zeta}) + \frac{\omega(\bar{\zeta})}{\omega(\zeta)} \overline{\varphi(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)} = i \int (p_x + i p_y) ds + C_1 \quad (2)$$

p_x, p_y は, それぞれ x, y 方向の外力, S に関する積分は境界に沿う積分を意味する。上式中の積分定数 C_1 は, まえがきに述べた理由により $C_1 = 0$ とできる。次にM上の変位は,

$$K \varphi(\bar{\zeta}) - \frac{\omega(\bar{\zeta})}{\omega(\zeta)} \overline{\varphi(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)} = 2G(u + iv) \quad (3)$$

G は, せん断弾性係数, K は $K = 3 - 4\nu$ (平面ひずみ), $K = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ (平面応力), ν はポアソン比である。式(2), (3)を用いて単位円周上の境界条件は,

$$\varphi(\bar{\zeta}) - \delta(\bar{\zeta}) \varphi(\bar{\zeta}) + \frac{\omega(\bar{\zeta})}{\omega(\zeta)} \overline{\varphi(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)} = f(\bar{\zeta}) \quad (4)$$

である。ここで $\delta(\bar{\zeta})$ は, L上で0, M上で $K+1$, $f(\bar{\zeta})$ は, L上で $i \int (p_x + i p_y) ds$, M上で $-2G(u + iv)$ なる関数である。式(4)の両辺に $d\bar{\zeta}/[2\pi i(\bar{\zeta} - \zeta)]$ を乗じ, コーシュ積分を行なうと

$$\varphi(\bar{\zeta}) - \frac{K+1}{2\pi i} \int_M \frac{\varphi(\bar{\zeta})}{\bar{\zeta} - \zeta} d\bar{\zeta} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L+M} \frac{\omega(\bar{\zeta})}{\omega(\zeta)} \frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\bar{\zeta} - \zeta} d\bar{\zeta} + \overline{\psi(0)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L+M} \frac{f(\bar{\zeta})}{\bar{\zeta} - \zeta} d\bar{\zeta} \equiv M(\zeta) \quad (5)$$

式(5)左辺の3項の積分を行なうと[3], 次式が得られる。

$$\varphi(\zeta) - \frac{K+1}{2\pi i} \int_M \frac{\varphi(\bar{\zeta})}{\bar{\zeta} - \zeta} d\bar{\zeta} = M(\zeta) - \sum_{k=1}^n \frac{\bar{A}_k B_k}{\zeta_k - \zeta} - A_\infty \equiv \frac{1}{2} N(\zeta) \quad (6)$$

ここで $\overline{\psi(0)} = 0$ としている。式(6)において、 $S \rightarrow S_0$ (S_0 は単位円周上の任意点)とすると、コーシー積分の極限値の定理を用いて式(6)は

$$(1-K)\varphi(S_0) - \frac{K+1}{\pi i} \int_M \frac{\varphi(S')}{S' - S_0} dS' = N(S_0) \quad (7)$$

となる。式(7)はRieman-Hilbertの問題になる[2, P.126]。まえがきに述べた理由により、

Plemelj 関数として $\chi(S) = (S-\alpha)^m (S-\beta)^{1-m}$ を用いると式(7)の特解として

$$\varphi(S_0) = \frac{a}{a^2-b^2} N(S_0) - \frac{b\chi(S_0)}{(a^2-b^2)\pi i} \int_M \frac{N(S')}{\chi(S')(S'-S_0)} dS' \quad (8)$$

が得られる。ここで $a = 1-K$, $b = -K-1$, $e^{2\pi i m} = (a+b)/(a-b)$, α, β は、変位境界と外力境界の接点の単位円上の座標である。さらに式(7)の同次解は、 $\varphi(S_0) \log(S_0-\alpha)/(S_0-\beta)$ が絶対積分可能な条件[2, P.129]のもとで $e/\chi(S_0)$ である。 e は任意定数。従って式(7)の一般解は、式(8)と $e/\chi(S_0)$ の和で表わされるが、 L と M の接点での変位の連続条件より $e=0$ でなければならぬので、今の場合式(7)の一般解は式(8)になる。式(8)は、コーシー積分の極限値の定理より次式の境界上の値と考えられる。

$$\varphi(S) = \frac{N(S)}{2} - \frac{K+1}{4\pi i K} \chi(S) \int_M \frac{N(S')}{\chi(S')(S'-S)} dS' \quad (9)$$

式(9)は、Plemeljの関数 $\chi(S)$ を含む積分を行なう必要がある。今の場合は図-1に示すような分岐線を持つ周回積分を考えることにより積分を行なうことができる[4]。その結果式(9)は、

$$\varphi(S) = -\chi(S) \sum_{k=1}^m \frac{\bar{A}_k B_k}{\chi(S_k)(S_k-S)} + M(S) - \frac{K+1}{2\pi i K} \chi(S) \int_M \frac{M(S')}{\chi(S')(S'-S)} dS' \quad (10)$$

となる。 $M(S)$ を含む積分は境界条件が与えられて始めて遂行される。式(10)は、未定定数 $\bar{A}_k$ を含んでいる。これは式(10)を S に関し1階微分し、 $S = S_k$ と代入して $\varphi'(S_k) = A_k$ と用いると[3], $A_k, \bar{A}_k$ に関する n 個の連立方程式を得る。これらの式と実部、虚部に分離して、 $2m$ 元1次の連立方程式を作り、これを解いて $A_k, \bar{A}_k$ が求まる。 $\varphi(S)$ が決まれば $\psi(S)$ は、式(4)の共役形式に、 $dS/[2\pi i(S-S)]$ と乗じ、コーシー積分を行なうことにより次式が得られる。

$$\psi(S) = -\overline{\varphi(0)} + \frac{K+1}{2\pi i} \int_M \frac{\overline{\varphi(S')}}{S'-S} dS' - \frac{\overline{\omega(S')}}{\omega(S)} \varphi'(S) - \sum_{k=1}^m \frac{A_k \bar{B}_k S_k^2}{S_k^2 - S} \quad (11)$$

計算例 変位拘束 ($u=v=0$) 端から発生したクラックを有する半無限板の応力分布を図-2に示す。

文献 [1] N. I. Muskhelishvili "Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity"

[2] S. G. Mikhlin "Integral Equations" Pergamon Press 1964 [3] 長谷部, 土木学会論文報告集 第185 1971

[4] A. H. England "Complex Variable Method in Elasticity"

Wiley Interscience 1971

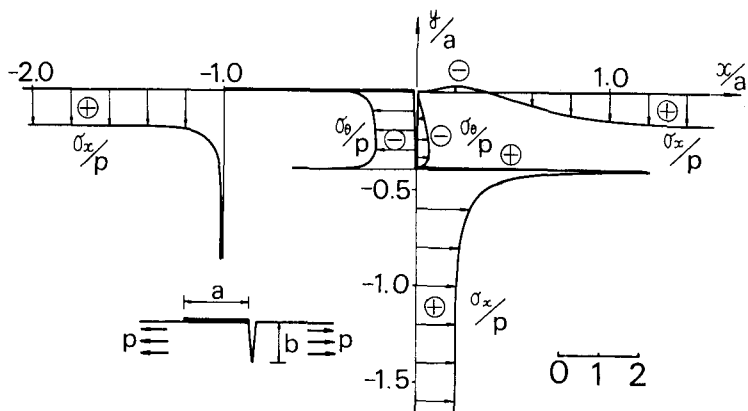
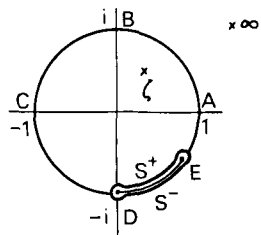


図-1 周回積分

図-2 応力分布 $K=2$, クラック長 0.4