

センチュリ リサーチ センタ(株)

"

"

○正員 小笠原正人

" 武田 洋

千葉 隆久

1. まえがき

今日、有限要素法による解法は各分野において広く行なわれ、その研究は工学的な面ばかりでなく、数学的な面からも進められている。それに伴い、数々の高次要素が開発され、線形解析においては、解の精度および経済性の点で低次要素より優れていると一般的に認められている。しかしながら、非線形解析においては高次要素の優位性は必ずしも認められるものではない。本報告は、材料非線形解析における高次要素の問題点を具体的に示すとともに、それを解決するための方法について論ずる。

2. 高次要素の問題点

軸対称8節点2次要素を用い、内圧を受ける円筒の熱弾塑性解析を行なうところ、図1.aに示す通り、弾塑性遷移領域において半径方向応力の半径方向分布に乱れが生じた。この乱れは残差修正を行なう、に後も回復せずに残ったままであった。8節点要素は内部に9点の評価点を有し、応力の乱れた要素は、降伏した点と降伏していない点の両者を含んでいた。一方、一点の評価点を持つ4節点1次要素による解は図1.bに示す通り滑らかな分布を示した。

ここでは1次元問題を例にし、内部に弾塑性遷移領域を含む2次の補間関数を用いた要素について考察を行う。

3. 塑性域の評価

塑性域の評価を詳しく行なうため、次の1次元問題を考える(図2,3参照)。

モデル : 長さ $2l$ [mm]、断面積 A [mm²] の棒 要素 : 3節点2次要素
 材料定数 : 弾性係数 $E = 2 \times 10^4$ [kg/mm²]、加工硬化係数 $H' = 400$ [kg/mm²]
 境界条件 : $x = 0$ で $u = 0$ 荷重条件 : 分布荷重 P [kg/mm]

ここで荷重 $P = P_0$ で要素1の積分点1が降伏したと仮定し、塑性域の評価は図4に示す3通りの方法で行なう。また、解法の手順は図6の変位法を用い、剛性マトリックスの弾性部 $[1k]$ はガウスの数値積分により求める。荷重増分 ΔP に対する要素1の各積分点における応力増分は次に示す通りである。

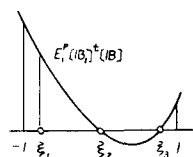


図4.a ガウスの数値積分

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -0.7796 \\ \xi_2 &= 0 \\ \xi_3 &= 0.7796 \\ E'_*(\xi_1) &= 0 \\ E'_*(\xi_3) &= 0 \end{aligned}$$

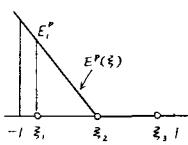


図4.b Type2 (線形分布)

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -0.7796 \\ \xi_2 &= 0 \\ \xi_3 &= 0.7796 \\ E'_*(\xi_1) &= 0 \\ E'_*(\xi_3) &= 0 \end{aligned}$$

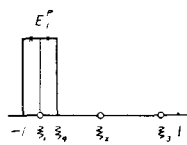


図4.c Type2 (集中分布)

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -0.7796 \\ \xi_2 &= 0 \\ \xi_3 &= 0.7796 \\ \xi_4 &= -0.5492 \\ \xi_5 &= 0.5492 \\ E'_*(\xi_1) &= 0 \\ E'_*(\xi_5) &= 0 \end{aligned}$$

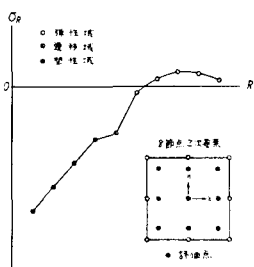


図1.a 応力分布(8節点要素)

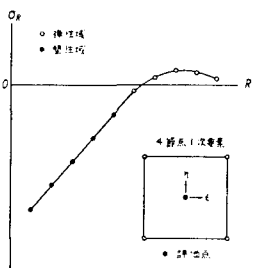


図1.b 応力分布(4節点要素)

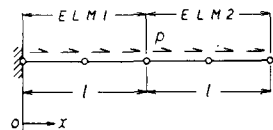


図2. 1次元モデル

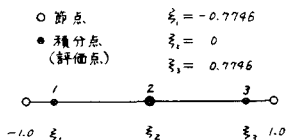


図3. 3節点2次要素

・ガウスの数値積分

$$[IK^P] = \int_0^L [IB]^T E^P [IB] d\xi = \int_0^L [IB]^T E^P [IB] d\xi = W_1 A E^P [IB_1]^T [IB_1] \quad (1)$$

$$\text{ここで、} \int_0^L = \ell/2 \quad E_1^P = -E^*/(E+H) \quad W_1 = 0.8889$$

$$\Delta \sigma_1 = 0.1558 \Delta P^*/A \quad \Delta \sigma_2 = 3.66 \Delta P^*/A \quad \Delta \sigma_3 = -0.6188 \Delta P^*/A$$

・Type1 (線形分布)

$$[IK^P] = \int_0^L [IB]^T E^P [IB] d\xi = \int_0^L [IB]^T E^P(\xi) [IB] d\xi \quad (2)$$

$$\Delta \sigma_1 = 0.1646 \Delta P^*/A \quad \Delta \sigma_2 = 3.960 \Delta P^*/A \quad \Delta \sigma_3 = -0.7207 \Delta P^*/A$$

・Type2 (集中分布)

$$[IK^P] = \int_0^L [IB]^T E^P [IB] d\xi = \int_0^L [IB]^T E^P(\xi) [IB] d\xi \quad (3)$$

$$\Delta \sigma_1 = 0.09846 \Delta P^*/A \quad \Delta \sigma_2 = 2.610 \Delta P^*/A \quad \Delta \sigma_3 = 0.1979 \Delta P^*/A$$

上記の結果から明らかな通り、いずれの評価法においても不合理な解を得ている。ここで、荷重 $P = P_y + 0.1P_y$ における応力分布を求めると図5の通りであり、理論値は線形な分布を呈している。しかしながら、解析値は要素1内における応力分布の線形性を保っていない。そこで、応力の線形分布を考慮した方法を考える。

4. 応力分布の仮定を基本とした方法

応力分布の仮定を基本とした方法も図6の破線内に示す。

ここで、 $[IN]$ は変位に関する2次の補間関数であり、 $[Z]$ は応力に関する1次補関関数である。

$$[IN] = \left[\left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \frac{4x}{\ell} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \quad \frac{x}{\ell} \left(-1 + \frac{2x}{\ell}\right) \right] \quad (4)$$

$$[Z] = [1 \quad x] \quad (5)$$

5. 計算例

前述と同様の条件により、 $\Delta P = \Delta P^*$ における応力増分を求める。

図6における $[f]$ を求める積分はガウスの数値積分を用い、分布荷重増分 ΔP^* に対する等価節点力は次式により求める。

$$\Delta \{f\} = \int_0^L [IN]^T \Delta P^* dx \quad (6)$$

計算結果は表1に示す通り、理論値と一致し、 $P = P_y + 0.1P_y$ における解は図7に示すように、要素1内でも線形な分布を呈している。

6. あとがき

高次要素は弾性解析においては良い精度を有するが、弾塑性解析における弾塑性遷移領域で不合理な解が生ずる場合がある。これは、変位を仮定した要素では、内部に遷移領域を有するとそれに対応しきれない事があるからである。このような問題を解決し、弾塑性解析においても高い精度の期待できる高次要素を開発すると同時に、本報書で用いた方法に対する理論的裏づけが今後の課題である。

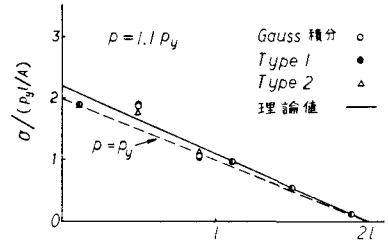


図5. 1次元問題の応力分布 (1)

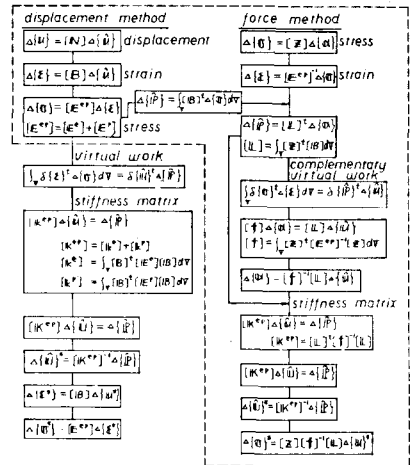


図6. 解法の流れ図

$\Delta \sigma / (\Delta P^*/A)$			
要素	積分点	計算値	理論値
1	1	1.88730	1.88730
	2	1.5	1.5
	3	1.11270	1.11270
2	1	0.88730	0.88730
	2	0.5	0.5
	3	0.11270	0.11270

表1 計算値と理論値

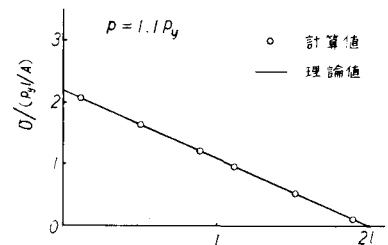


図7. 1次元問題の応力分布 (2)