

明石高専 正員 高 端 宏 直
近畿大学 正員 谷 平 勉
中部工大 正員 倉 田 宗 章

1). まえがき……板の差分化した式と Boussinesq の理論式を結合して弾性体上の板の近似解を既に求めたが、今回はそれらをもとに LEE の対応原理²⁾を用いて粘弾性体の場合の近似解析を試みた。

2) 解式の誘導……始めに弾性体の場合の解を列挙する。図-1は弾性体と板の諸元を示す。荷重は鉛直の集中荷重 P と等分布荷重 q を考える。板の差分式は、 $D_s/\Delta x^4 \cdot [K]\{w\} = \{q_f\} - \{q_f\}$ ----(1) で表される。(D_s : 板剛度, $[K]$: 差分法の係数マトリックス)

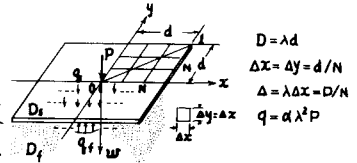


図-1. 平板基礎の諸元

地盤反力 q_f と弾性体表面の変位との関係(図-2)は $w_{ni} = q_f \cdot \Delta x^2 / D_s + f_{ni}$ ----(2)

である。ここで $f_{ni} = 3.525$, $f_{ni} = 1/r_n$, $D_s = \pi E_0 / (1 - \nu^2)$ とする。(E_0, ν は弾性体の弾性係数, λ はポアソン比) (2) 式をマトリックス表示すると、 $\{w_f\} = \frac{\Delta x^2}{D_s} [K_f] \{q_f\}$ または $\{q_f\} = \frac{D_s}{\Delta x^2} [K_f] \{w_f\}$ ----(3)

となる。 $[K_f]$, $\{f_{ni}\}$ は基礎の剛性マトリックスと撓性マトリックスで、 $[K_f] = [f_{ni}]^{-1}$ の関係にある。

次に(1), (2)式より板のたわみ w は次式より求められる。

$$([K] + \gamma_0 [K_f]) \{w\} = \frac{P}{D_s \lambda^2} \{ \alpha \gamma_0^4 + \beta \gamma_0^{2/3} \} \text{ ----(4) } (\lambda^3 = D_s / D_s, \alpha = q_f / P \Delta^2, \Delta^3 = r_0, \alpha, \beta \text{ は荷重係数})$$

地盤内の鉛直応力度 σ_z は、(図-3) $\{\sigma_z\} = \frac{3\Delta x}{2\pi} \{q_f\} \cdot \{r\}$ ----(5) で表され、 $\{r\}$ は $z_j^3 / (x_j^2 + y_j^2 + z_j^2)^{5/2}$ を要素とするベクトルである。

a) Kelvin model … G をせん断弾性係数, K を体積弾性係数, P, Q, P', Q' を微分演算子,

D を $(\partial/\partial t)$, A, B, C を粘弾性材料の係数とし、粘弾性法則より、 $Q(p)/p(p) = 2G = AD + B$, $Q'(p)/p'(p) = 3K = C - (4)$ をうる。これを用いて、 $(1 - \nu^2)/E_0 = (3K + 4G)/2G(6K + 2G) = [Q(p)/p(p) + 2Q'(p)/p'(p)] / \frac{Q(p)}{P(p)} [2Q(p)/p(p) + Q'(p)/p'(p)]$ ----(4)

と変形し、(2)式は、 $w_f^* = \frac{\Delta x^2}{\pi} q_f(t) \cdot \left\{ \frac{2B+C}{B(B+2C)} \cdot \frac{1}{p} - \frac{A}{B} \cdot \frac{1}{Ap+B} - 3A/2(B+2C) \cdot \frac{1}{Ap+B+2C} \right\} \cdot \frac{1}{r_n}$ ----(8) となり、 p を変数として Laplace 変換すれば、粘弾性体の場合の解をうる。

$$w_f = \frac{\Delta x^2}{\pi} q_f(t) \cdot \frac{2B+C}{B(B+2C)} \left\{ 1 - \frac{B+2C}{2(B+C)} \exp\left(-\frac{B}{A}t\right) - \frac{3B}{2(B+C)} \cdot \exp\left(-\frac{B+2C}{A}t\right) \right\} \cdot \frac{1}{r_n} \text{ ----(9)}$$

本式の $q_f(t)$ は一定であるが、本問題では time dependent であるため、 t のみこみ積分を用いる。また問題を簡単にするため $C=0$ として非圧縮性粘弾性体とすると、 $w_f = \frac{2\Delta x^2}{\pi} \left\{ \int_0^t \exp\left(-\frac{B}{A}\tau\right) \cdot H(\tau) \cdot q_f(t-\tau) d\tau \right\} \cdot \frac{1}{r_n}$ ----(10) をうる。数値計算を行うために時間まき幅 $\frac{B}{A}\Delta t = \Delta T$, $\frac{B}{A}t = T$, $t = n\Delta t$ とおく。

$$\{w_f\} = \frac{2\Delta x^2}{\pi B} \{F(t) + \{q_f\}\Delta T\} \cdot \{f_f\}, \quad \{q_f\} = \frac{\pi B}{2\Delta x \Delta T} [K_f] \cdot \{w_f\} - \frac{1}{\Delta T} \{F(t)\} \text{ ----(11)}$$

ここで $F(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \exp\{(i-n)\Delta T\} \cdot q_f(i\Delta T)\Delta T$ である。そこで(1)と(10)式から板のたわみ式は次式となる。

$$([K] + \frac{\gamma_0}{\Delta T} [K_f]) \{w\} = \frac{P}{D_s \lambda^2} \{ \alpha \gamma_0^4 + \beta \gamma_0^{2/3} \} + \frac{1}{\Delta T} \cdot \frac{\Delta x^4}{D_s} \{F(t)\} \text{ ----(12)}$$

ここで、 $\lambda^3 = \pi B / 2D_s$, $\lambda \Delta x = \Delta$, $\Delta^3 = \gamma_0$ である。初期条件は $\{w\}_{t=0, n=0} = 0$ とし、時間を ΔT ずつ増加させ、逐次演算を繰返してゆく。

b) Maxwell model … 前節の(6), (8)式に相当する式は、 $Q(p)/p(p) = D/AD + B = 2G$, $Q'(p)/p'(p) = C = 3K$ ----(13)

$$w_f^* = \frac{\Delta x^2}{\pi} \frac{q_f(t)}{p} \left[\frac{A(AC+2)}{(2AC+1)p+2BC} + \frac{2B(AC+1)}{p[(2AC+1)p+2BC]} + \frac{B^2C}{p^2(2AC+1)p+2BC} \right] \text{ ----(14) である。}$$

この場合も $C=0$ として、Laplace 変換をして、 t のみこみ積分をすれば

$$w_f = \frac{2\Delta x^2}{\pi} \left\{ q_f(t) \cdot A + B \int_0^t q_f(\tau) d\tau \right\} \cdot \frac{1}{r_n} \text{ ----(15) となり、(11), (12) に相当する式は次のようになる。}$$

$$\{w_f\} = \frac{2\Delta x^2}{\pi} \left\{ \{q_f\} + \frac{1}{\Delta T} \{q_{f, n-1}\} + \{F(T)\} \right\} \{f_f\}, \quad \{q_f\} = \frac{\pi}{2\Delta x \Delta T} [K_f] \{w_f\} - \frac{1}{\Delta T} \{q_{f, n-1}\} - \{F(t)\} \text{ ----(16)}$$

$$([K] + \frac{\gamma_0}{\Delta T} [K_f]) \{w\} = \frac{P}{D_s \lambda^2} \{ \alpha \gamma_0^4 + \beta \gamma_0^{2/3} \} + \frac{\Delta x^4}{D_s} \{F(t)\} \text{ ----(17)}$$

ここで、 $F(T) = \sum_{i=1}^{n-1} q_f(i\Delta T)$, $\lambda^3 = \frac{\pi}{2D_s A}$, $\lambda \Delta x = \Delta$, $\Delta^3 = \gamma_0$ である。

3) 数値計算

結果……

中央点集中荷重と全面等分布荷重載荷の場合について計算した。

図-4は中央点のたわみ、地盤反力、曲げモーメントと時間との関係を示した。

図-5は板の対角線上のたわみと時間変化を示した。

図-6は半無限体内の鉛直応力度すなわち地盤応力度の分布を時間経過と共に描いた。

Kelvin modelの $T=\infty$ と Maxwell の $T=0$ は一致するものと考えられ Maxwell $aT=0$ の場合をあげた。いずれも、荷重と基礎モデル

の特色がよく現われている。

4) あとがき… 以上、差分法と Boussinesq 理論との統合をもとに諸値の近似値を示したが、時間方向の積分の精度の問題や時間ごみ幅の差に検討の余地がある。 以上

参考文献

- 1) 倉田 高瑞, 岩平: 3次元弾性体上の平板の曲げについて, 第29回地球学会秋季学術講演会, I-126, 547
- 2) E.H. LEE: Stress Analysis in Visco-Elastic Bodies, Quarterly of Applied Mathematics, Vol. XIII, No. 2, 1955.

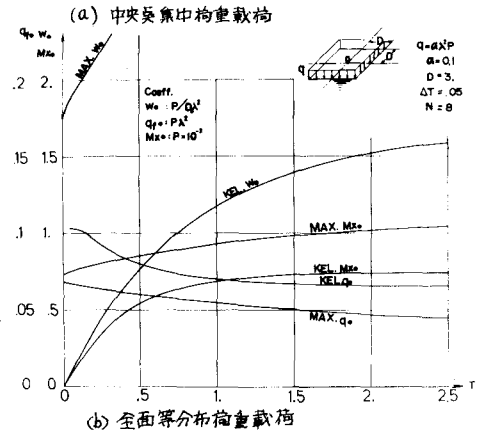
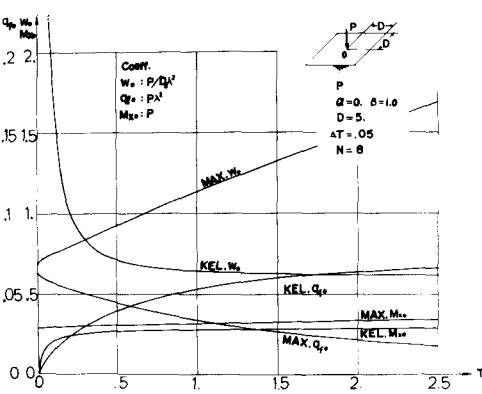


図-4 $W_0, M_{x0}, f_0 - T$ 曲線

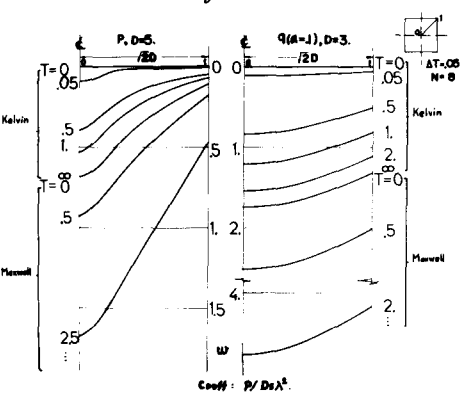


図-5 板のたわみの時間的变化

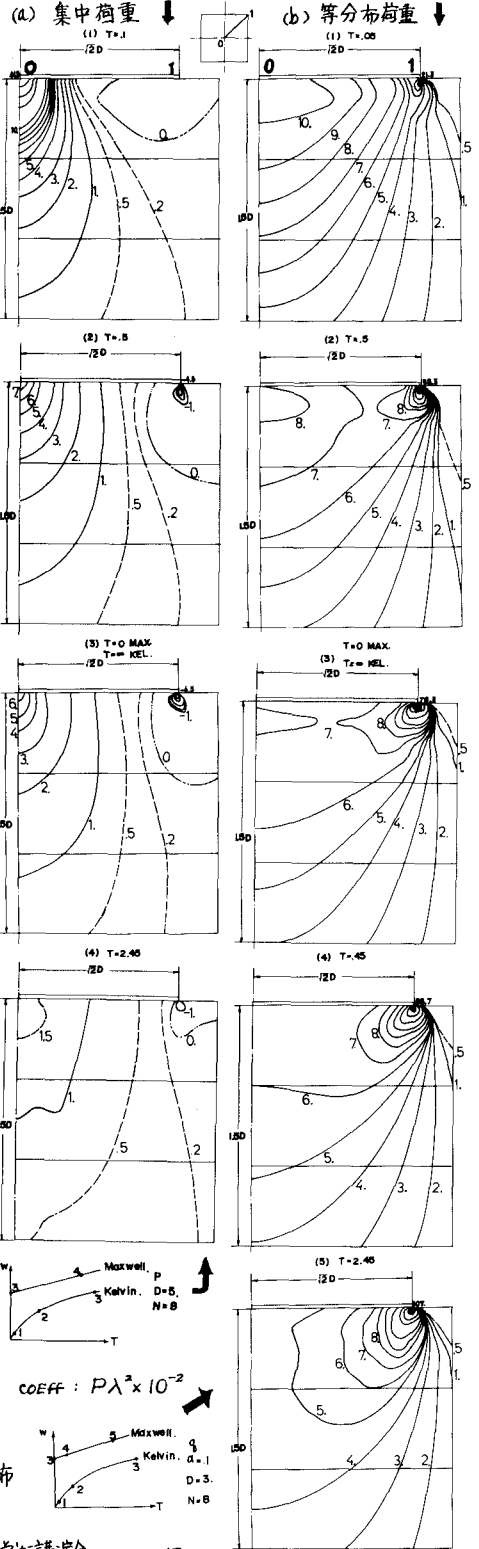


図-6 地盤内鉛直応力度分布の時間的变化