

信州大学大学院 学生員 ○金原 慎一

信州大学 正 員 吉田 俊弥

信州大学 正 員 三井 康司

1. 緒言 本研究は、土木材料における粘弾性挙動を、経済的に、なおかつ効率よく、簡便に解析することを目的としたものである。このような粘弾性挙動は、従来、時間を増分パラメータとする増分法が用いられており、Zienkiewicz は有限要素法を用いて複雑な境界条件を持つ構造物をこの時間増分法にて解析している。¹⁾

しかし、この解析手法においては多大なる解析時間を必要とする。しかし、E. H. Leeによって定式化された「弾性-粘弾性対応原理」により、この問題は扱い易い問題となった。²⁾ところが、この「対応原理」を用いる上に、一つの問題がある。Laplace変換パラメータによって表わされたLaplace面における粘弾性解を逆Laplace変換する場合に、有限要素法に代表されるような窮極的には連立一次方程式を解くことに帰する解析法を用いる場合には、Laplace面での式表示のまま逆Laplace変換できないことにある。このため、逆Laplace変換を数値的に行なうことが試みられている。単固らは、粘弾性材料の構成方程式が指数関数で表示されていることより、物理空間での構造体の挙動を指数関数で仮定し、逆Laplace変換を行なうことを提案している。²⁾本研究においては、特に、この手法を用いる。このような数値逆Laplace変換を用いて、粘弾性体のF.E.M.解析を行なうことにより、従来の増分法と比較して、かなりの経済性が期待できるが、それでも対象構造物が長大化すれば、多大な記憶容量を必要とし、それによって解析時間が増大する。そこで、本研究は、粘弾性解析もF.E.M.に比べ、はるかに少ない記憶領域で済む有限帯板法(以下、F.S.M.と記す)によって行なおうとするものである。

2. F.S.M.による粘弾性解析 ここで、数値逆変換に用いる級数は、三井がF.E.M.解析を行なったと同様にLegendre多項式を用いる。³⁾物理空間での粘弾性挙動を表わす原関数 $f(x)$ を、

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i P_{2i}(x) \quad \text{-----}(1)$$

と置く。Legendre多項式は、

$$P_n(x) = \sum_{\mu=0}^n (-1)^\mu \frac{(2n-2\mu)!}{2^n \mu! (n-\mu)! (n-2\mu)!} x^{n-2\mu} \quad \text{-----}(2)$$

と表わされ、ここで $x = e^{-st}$ である。よって、式(1)をLaplace変換すると、

$$\bar{f}(s) = \frac{C_0}{s} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(s-s)(s-3s)\cdots\{s-(2i-1)s\}}{s(s+2s)\cdots(s+2is)} \quad \text{-----}(3)$$

となり、Laplace変数 s による $s, 3s, \dots$ を代入することによって、連立方程式を解くことなしに順次未定係数 C_i が決定され、粘弾性解が得られるのである。ただし、 s は定数である。

つぎに、これをF.S.M.に適用しよう。弾性問題において、F.S.M.の解は一般に次式で表わされる。

$$\{\delta\} = \sum_{m=1}^{\infty} [\delta_m] \{f_m(z)\} \quad \text{-----}(4)$$

ここに、 $\{\delta\}$ は節線における変位であり、 δ_m はその変位級数の係数であり、 $f_m(z)$ は級数に選んだ関数である。

式(4)をLaplace変換すると、

$$\{\bar{\delta}_0\} = \sum_{m=1}^{\infty} \{\bar{\delta}_m(s)\} \{f_m(s)\} \quad \text{-----}(5)$$

また、 $\{\bar{\delta}_m(s)\} = [R(s)] \{\bar{F}_m(s)\}$ であるから、Laplace面における粘弾性解は、

$$\{\bar{\delta}(s)\} = \sum_{m=1}^{\infty} [R(s)]^{-1} \{\bar{F}_m(s)\} \{f_m(s)\} \quad \text{-----}(6)$$

となる。ただし、 $[R(s)], \{\bar{F}_m(s)\}$ は、全体剛性matrix $[K(E, \nu)]$ 、荷重項 $\{F_m\}$ に対応原理を用いてLaplace変換したものである。式(6)に、Legendre多項式(3)を適用することにより、物理空間における粘弾性解が求まる。

3. 計算結果および考察 つぎに、F.E.M.による粘弾性体の簡単な計算例を示す。

図-1 に示すような境界条件の異なる平板についての粘弾性解析結果を示す。

平板の材料特性は、体積変化に対しては弾性挙動、せん断変形については Kelvin 要素挙動とするものとした。

厳密解は、G.E. Mase によって、示されておりつぎのようになる。⁴⁾

$$\frac{W(x, y, t)}{W(x, y, \infty)} = 1 - \frac{3K+G}{3K+4G} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - \frac{3G}{3K+4G} \exp\left(-\frac{2K+G}{G} \frac{t}{\tau}\right) \dots (7)$$

近似解は、収束した値、つまり、 $\frac{t}{\tau} = 30$ のときの値、 $W(x, y, 30)$ を用いて、 $W(x, y, t) / W(x, y, 30)$ にて計算している。ここに、 K は体積弾性係数、 G はせん断弾性定数である。

表-1 は、各境界条件による収束状況をみだものであり、自由辺を有する場合には収束が悪い。しかし、これは Legendre 多項式の項数をあと 2 項とれば高精度の解が得られる。なお、表-1 における結果は、項数 6 項で計算したものであり、HITAC 8800/8700 にて、 $CTIM = 2.291(4)$ であった。また、表-2 は Legendre 項数による収束の度合をみだものである。これは、Model (A) についての結果であり、項数が少なくとも時間の経過に伴って精度は増す。全般的に、項数は 6 項、特定な場合にも 7~8 項とれば充分であることがわかる。また、図-2 は、 (8×8) m 板等分布荷重 8 t/m^2 が満載された板の中央的たわみをもモデルについて示したものである。

4) 参考文献

- 1) Zienkiewicz O.C.: A numerical method of visco-elastic stress analysis, Int. mech. Sci. Program Press, Vol. 10, pp 807~827 1968
- 2) 華岡三井、入口：対称原理による線型粘弾性解析，土木学会第 32 回年次学術講演会講演概要集，pp 86~87，昭和 52 年 10 月
- 3) 三井康司：Legendre 多項式を用いた線型粘弾性体の近似解析，信州大学工学部紀要 pp. 27~48.
- 4) G.E. Mase: Behavior of Viscoelastic Plates in Bending, Engineering Mechanics Division, ASCE, 1960, June pp. 25~39
- 5) Lee, E.H.: Stress Analysis in visco-elastic bodies, Vol. XIII, No. 2, pp 183~190 Jun. 1954
- 6) Y.k. Cheung: Finite Strip Method in Structural Analysis.

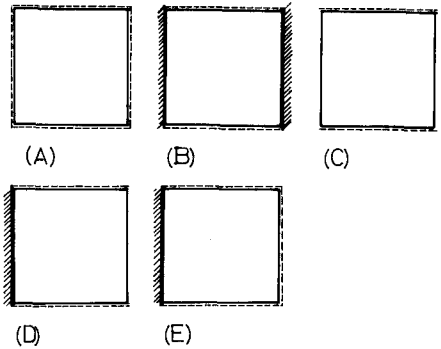


Fig-1 Boundary condition of plate.

Table-1 Comparison between Approximate and Exact Solutions

$\frac{t}{\tau}$	MODEL					Exact
	A	B	C	D	E	
0	0.00050	0.00050	0.01601	0.00440	0.00050	0
1	0.75380 (0.02)	0.75380 (0.02)	0.74371 (1.35)	0.73509 (2.50)	0.75380 (0.02)	0.75392
2	0.90967 (0.01)	0.90967 (0.01)	0.90059 (1.01)	0.89480 (1.65)	0.90967 (0.01)	0.90977
3	0.96659 (0.02)	0.96659 (0.02)	0.96086 (0.62)	0.96031 (0.67)	0.96659 (0.02)	0.96681
4	0.98766 (0.01)	0.98766 (0.01)	0.98501 (0.28)	0.98517 (0.27)	0.98766 (0.01)	0.98779
5	0.99545 (0.01)	0.99545 (0.01)	0.99439 (0.11)	0.99450 (0.10)	0.99545 (0.01)	0.99551
10	0.99997 (0.0)	0.99997 (0.0)	0.99996 (0.0)	0.99996 (0.0)	0.99997 (0.0)	0.99997

Table-2 Solutions for Various Terms (Model-A)

$\frac{t}{\tau}$	Legendre Term			Exact
	2	4	6	
0	0.20000	0.03031	0.00050	0
1	0.70570 (6.40)	0.75408 (0.02)	0.75380 (0.02)	0.75392
2	0.89173 (1.98)	0.89872 (1.21)	0.90967 (0.01)	0.90977
3	0.96017 (0.69)	0.96000 (0.70)	0.96659 (0.02)	0.96681
4	0.98535 (0.25)	0.98485 (0.30)	0.98766 (0.01)	0.98779
5	0.99461 (0.09)	0.99436 (0.11)	0.99545 (0.01)	0.99551
10	0.99996 (0.0)	0.99996 (0.0)	0.99997 (0.0)	0.99997

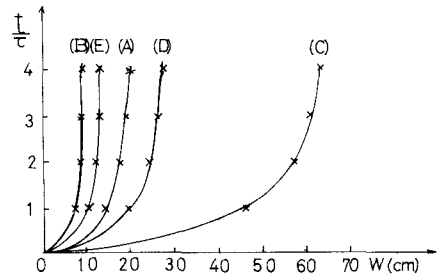


Fig-2 Deflection at center of the plate.