

信州大学 工学部 正員 〇三 井 康 司
 信州大学 工学部 正員 草 岡 孝 志
 信州大学 工学部 正員 吉 田 俊 弥

1. はじめに 線形粘弾性問題の数値解析法の一つに「弾性・粘弾性対応原理」によるものがあり、この方法によれば広範囲の粘弾性の挙動を把握するためには時間増分法と較べて計算時間が少なくて済むという利便を有している。しかし反面ラプラス逆変換が容易でない場合が多く数値ラプラス逆変換を利用して得られた解の精度を検照する方法がない。従来の数値ラプラス逆変換法には偶関数のルジャンドル多項式等の直交関数を近似関数として用いる方法²⁾、あるいはSchaperyの逆変換法³⁾によるものが提案されているが前者は近似関数の係数は比較的簡単に求めることができるとは広い時間領域に亘って精度よく逆変換できず、後者は未定係数の決定に際して連立方程式を解く必要が生ずる。また両者とも逆変換に際してラプラス変数の選択に確固たる根拠がない。

本文はこのような見地から、1)効率よく逆変換法、2)精度よく逆変換可能なラプラス変数の選択法、について述べ、粘弾性連続体の二、三の数値計算例より本法の妥当性を検照したものである。

2. 正規直交指数関数による数値ラプラス逆変換¹⁾ 粘弾性物体内の任意点 i ($i=1 \sim m$) における変位、ひずみ、応力等を表わす物理量 $y_i(t)$ は $f_i(t)$ をこの過渡成分として $y_i(t) = C_{i0} + f_i(t)$ ----- (1)

とおくことができる。ここに C_{i0} は定数であり、 $f_i(t)$ はラプラス変換可能な関数 $q_i(t)$ を用いて

$f_i(t) = \sum_{j=1}^n C_{ij} q_j(t)$ ----- (2) とする。 $q_j(t)$ を任意の指数関数、 $e^{-\gamma_1 t}$, $e^{-\gamma_2 t}$, ----- からなる正規直交関数とすると直交条件より $q_j(t)$ は一般に下記の形で表せる。

$$q_j(t) = \sqrt{2\gamma_j} \sum_{k=1}^n \left[\frac{2\gamma_k}{\gamma_k + \gamma_j} \left\{ \prod_{l=1}^j \left(\frac{\gamma_k + \gamma_l}{\gamma_k - \gamma_l} \right) \right\} \exp(-\gamma_k t) \right] \text{--- (3)}$$

式 (3) を式 (2) に代入しラプラス変換をし変換変数 s を $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ とすると未定係数 C_{ij} は下記のようなになる。

$$C_{ij} = \sqrt{2\gamma_j} \sum_{k=1}^n \left[\frac{2\gamma_k}{\gamma_k + \gamma_j} \left\{ \prod_{l=1}^j \left(\frac{\gamma_k + \gamma_l}{\gamma_k - \gamma_l} \right) \right\} \bar{f}_i(\gamma_k) \right] \text{--- (4)}$$

ここに $\bar{f}_i(\gamma_k)$ は $f_i(t)$ のラプラス変換を表わす(以下同一様である)。また式 (1) の C_{i0} は $C_{i0} = \lim_{s \rightarrow 0} s \bar{y}_i(s)$ ----- (5) より決定される。

3. ラプラス変数の選択

式 (2), (4) より過渡成分 $f_i(t)$ は $\sum_{j=1}^n A_{ij} \exp(-\gamma_j t)$ の形で表さる。いま γ の分布を連続的と考えたと $\alpha = 1/\gamma$ として次式が成立する³⁾。

$$f_i(t) = \int_0^\infty F(\alpha) \exp(-t/\alpha) d\alpha = \int_0^\infty H(\alpha) \exp(-t/\alpha) d(\ln \alpha) \text{--- (6)}$$

$H(\alpha)$ は単軸応力状態の場合、 α を材料の緩和時間とおきかえると緩和スペクトルに一致する³⁾、ここは材料の性質のみならず構造体の形状、境界条件、荷重状態などで規定され、与えられた粘弾性問題においては固有なものであり、これによって粘弾性物体の挙動を全て明らかにすることができるといえる。

$H(\alpha)$ は $\bar{f}_i(s)$ のステルテス変換となるから、 $H(\alpha)$ を求めるために

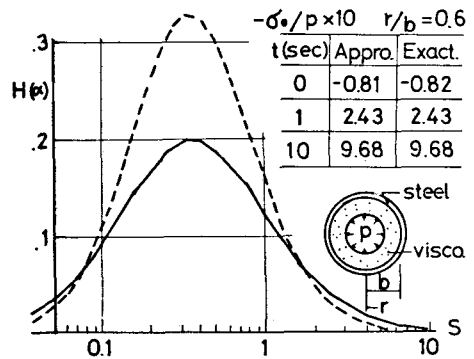


Fig.1 Spectrum

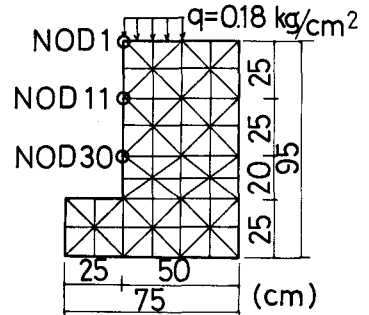


Fig.2 Mesh Division

スチルチエス逆変換公式を適用し、その近似反転公式としてつぎの式を得る。

$$H(\alpha) = \frac{1}{2} \left[\frac{d\{S\bar{f}(s)\}}{d(\ln s)} + \frac{d^3\{S\bar{f}(s)\}}{d(\ln s)^3} \right] \Big|_{s=1/\alpha} \quad (7)$$

$$H(\alpha) = \frac{1}{6} \left[4 \frac{d\{S\bar{f}(s)\}}{d(\ln s)} - 5 \frac{d^3\{S\bar{f}(s)\}}{d(\ln s)^3} + \frac{d^5\{S\bar{f}(s)\}}{d(\ln s)^5} \right] \Big|_{s=1/\alpha} \quad (8)$$

$$\text{式 (1) より, } S\bar{f}_i(s) = s\bar{y}_i(s) - C_{i0} \quad (9)$$

となり、 $S\bar{f}_i (i=1 \sim n)$ を与えることにより対応原理により $\bar{y}_i(s)$ が求まるから結局 $S \sim S\bar{f}_i(s)$ の関係が得られ、式 (7) あるいは式 (8) より $H(\alpha)$ が求まる。この $H(\alpha)$ の卓越する近傍の S を用いて逆変換を施せば、 $f_i(t)$ は卓越する近傍に線スワットルをもつ関数となるから原関数 $f_i(t)$ は精度よい近似関数であると考えられる。

4. 数値計算例および考察 図1はLeeの取り扱った内圧を受ける粘弾性シリンダーである。応力に関するスワットルは $S=0.35$ で卓越しており、この近傍の値 $S=0.1, 0.2, 0.4, 0.8, 1.6$ の5項により逆変換を行なったが厳密解とよく一致をみた。

図2はオーフンカットの肩に載荷された粘弾性地盤であり、図3は粘弾性定数の異なる層より成る地盤中のシールド外周地盤の挙動を解析したものである。両モデルとも粘弾性定数 $E(t)$ 、 $\nu(t)$ を緩和関数、 $E(t) = E_0 + \sum_{i=1}^n E_i \exp(-t/\tau_i)$ 、 $\nu(t) = \xi_0 \dots (10)$ と与えている。図2では $E_0 = 45.528 \text{ kg/cm}^2$ 、 $E_1 = 15.515 \text{ kg/cm}^2$ 、 $E_2 = 7.168 \text{ kg/cm}^2$ 、 $\tau_1 = 1.63 \text{ 分}$ 、 $\tau_2 = 16.57 \text{ 分}$ 、 $\xi_0 = 0.4$ 、図3では MAT1 で $E_0 = 200 \text{ t/m}^2$ 、 $E_1 = 60 \text{ t/m}^2$ 、 $E_2 = 30 \text{ t/m}^2$ 、 $\tau_1 = 5 \text{ 分}$ 、 $\tau_2 = 50 \text{ 分}$ 、 $\xi_0 = 0.45$ 、MAT2 で $E_0 = 1500 \text{ t/m}^2$ 、 $E_1 = 500 \text{ t/m}^2$ 、 $E_2 = 250 \text{ t/m}^2$ 、 $\tau_1 = 20 \text{ 分}$ 、 $\tau_2 = 200 \text{ 分}$ 、 $\xi_0 = 0.35$ で計算した⁴⁾。図3、4、6、7はF.E.M.計算による解析結果であり、代表的な節点(図中のNOD)に図すも垂直、水平変位を示したものである。図3、4より約160分、図6、7では5時間位で定常状態に達することわかる。

通常の増分法を用いた場合、時間増分 Δt の取り方が問題になる。文献4)では $\Delta t < \tau_1$ として図2の計算例を行なったおり、160分まで約100回の繰り返し計算を行ない定常解を得ている。本法での繰り返し計算回数はこの約1/5であり、かなりの経済性が期待できるものと思われる。

参考文献:

- 1) 草間: 数値ラプラス逆変換法に関する一試みと粘弾性問題への応用, 建築学会北陸支部, 1978年6月。
- 2) 三井: Legendre多項式を用いた線形粘弾性体の近似解析, 信州大学工学部紀要, No.43, 1977年12月。
- 3) 山本: 物体の変形学, 誠文堂, 1972年。
- 4) 藤原, 吉岡: 有限要素法による地盤の粘弾性解析, 大林組技術研究所報, No.11, 1975年。
- 5) 赤木: レオロジーモデル定数の一決定法, 土と基礎, No.25-3, 1977年。

