

石川島播磨重工業 技術研究所 正員 加藤 一行

1. はじめに

線型粘弾性問題の解析に対応原理を適用するという方法は広く行われており、かつ有力な手段であることは周知の通りである[1]。対応原理はその成り立ちから考えて有限要素法にも適用できることは明らかである。そして対応原理を有限要素法に適用するという考えは田中[2]によって定式化されている。しかしながら、その解析手法では、数値計算によるラプラス逆変換を行わなくてはならず、その定式化の労力、演算に要する時間は多大なものであるのではないと思われる。本論文で述べる手法は、有限要素方程式を固有関数展開することによって、ラプラス逆変換を解析的にできる様にするものである。この手法によって数値的ラプラス逆変換をさげることができ、精度良く、かつ少ない計算時間で線型粘弾性解を求めることができる。以下にこの手法の概要を述べ、例題として定内圧を受ける粘弾性厚肉中空円筒を解き、解析解と良く合うことを示す。

2. 手法の概要

有限要素方程式を組み立てるのに必要の諸式をラプラス変換して、一般の手法に従い糸全体に対して有限要素方程式を組み立てると、ラプラス変換された量に対して上の一を記して、次の如くなる。

$$\{\bar{\lambda}[K_v] + 2\bar{\mu}[K_d]\}\{\bar{u}\} = \{\bar{f}\} \quad \dots(1)$$

ここに、 $\bar{\lambda}, \bar{\mu}$: ラプラス変換された Lamé 定数, $\{\bar{u}\}$: 節変位ベクトル, $\{\bar{f}\}$: 節負荷重ベクトル

$$[K_v] = \sum \int [B]^T [E] [B] dV, [E] = (111000)^T (111000), [K_d] = \sum \int [B]^T [I] [B] dV$$

$$\bar{\rho} = 2\bar{\mu} \cdot \bar{\lambda}^{-1} \text{ において, (1) 式を変形すると次式を得る。}$$

$$\{[K_v] + \bar{\rho}[K_d]\}\{\bar{u}\} = \{\bar{f}\}\bar{\lambda}^{-1} \quad \dots(2)$$

ここで、(2)式の同次式(3)を固有関数展開すると、 $\{\bar{u}\}$ は糸の自由度と同じ数の固有ベクトル $\{d_j\}$ ($j=1, 2, \dots, n$)の和で表わされる、すなわち(4)式を得る。

$$\{[K_v] + \bar{\rho}[K_d]\}\{\bar{u}\} = \{0\} \quad \dots(3)$$

$$\{\bar{u}\} = \sum_{j=1}^n \bar{c}_j \{d_j\} \quad \dots(4)$$

この(4)式を(2)式に代入して、固有ベクトルの直交関係(5)を用いるために $\{d_j\}^T$ を前より乗ずると(6)式を得る。

$$\{d_i\}^T [K_d] \{d_j\} \begin{cases} \neq 0 & (i=j) \\ = 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad \dots(5)$$

$$(-\bar{\lambda}\beta_j + 2\bar{\mu}) \cdot \bar{c}_j = \bar{g}_j \quad \dots(6)$$

ここに、 β_j : (3)式のj番目の固有値, $\bar{g}_j = \{d_j\} \{\bar{f}\} / \{d_j\}^T [K_d] \{d_j\}$

(6)式を $\bar{c}_j$ について解くと(7)式を得る。(7)式は単一の式なので比較的簡単にラプラス逆変換できる。

$$\bar{c}_j = \frac{\bar{g}_j}{-\bar{\lambda}\beta_j + 2\bar{\mu}} \quad \dots(7)$$

$\bar{c}_j$ のラプラス逆変換を $c_j(t)$ とすると、線型粘弾性体の節変位ベクトル $\{u(t)\}$ は(4)式をラプラス逆変換を施すことによって次の如くなる。

$$\{u(t)\} = \sum_{j=1}^n C_j(t) \{d_j\} \quad \dots (8)$$

結局 $\{u(t)\}$ は (3) 式より固有値 p_j , 固有ベクトル $\{d_j\}$ を求め, (7) 式に代入し, ある材料及び荷重条件のもとでラプラス逆変換 $C_j(t)$ を求め, (8) 式に代入することによって得られる。

3. 例題 定内圧を受ける厚肉中空円筒の解析

いま材料が, 体積成分に対して弾性挙動を, せん断成分に対して3要素固体挙動を示す材料とすると, すなわち, その構成方程式が次式で表わされる材料であるとすると。

$$\begin{aligned} p &= K e \\ S_{ij} + p_1 \frac{d}{dt} S_{ij} &= q_0 e_{ij} + q_1 \frac{d}{dt} e_{ij} \end{aligned} \quad \dots (9)$$

ここに, p : 平均垂直応力, $p = \frac{1}{3} \sigma_{ii}$, e : 体積ひずみ, $e = E_{ij}$, S_{ij} : 偏差応力テンソル, $S_{ij} = \sigma_{ij} - p \delta_{ij}$
 e_{ij} : 偏差ひずみテンソル, $e_{ij} = E_{ij} - \frac{1}{3} e \delta_{ij}$, σ_{ij} : 応力テンソル, E_{ij} : ひずみテンソル, K : 体積弾性係数, p_1, q_0, q_1 : 3要素固体の材料定数

荷重(内圧)が $p(t) = p_0 \Delta(t)$ $\{\Delta(t): \text{step function}\}$ と与えられたとすると, 定内圧を受ける厚肉中空円筒 (Fig-1) の側方変位 $u(t, r)$ は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} u(t, r) = \frac{p_0 b^2}{a^2 - b^2} \left\{ \left[\frac{3}{6K + q_0} + \left(\frac{3p_1}{6Kp_1 + q_1} - \frac{3}{6K + q_0} \right) \exp \left(- \frac{6K + q_0}{6Kp_1 + q_1} t \right) \right] r \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{q_0} + \left(\frac{p_1}{q_1} - \frac{1}{q_0} \right) \exp \left(- \frac{q_0}{q_1} t \right) \right] \frac{a^2}{r} \right\} \quad \dots (10) \end{aligned}$$

一才, $C_j(t)$ は, 節長荷重 $p(t) = p_0 \Delta(t)$ と与えられたとすると次の如くなる。

$$C_j(t) = \frac{q_j}{q_0 + \frac{1}{3} q_1 p_j - K p_j} \left\{ 1 - \exp \left(- \frac{q_0 + \frac{1}{3} q_1 p_j - K p_j}{q_1 + \frac{1}{3} q_1 p_j - K p_j} t \right) \right\} + \frac{q_1 p}{q_1 + \frac{1}{3} q_1 p_j - K p_j} \exp \left(- \frac{q_0 + \frac{1}{3} q_1 p_j - K p_j}{q_1 + \frac{1}{3} q_1 p_j - K p_j} t \right) \quad \dots (11)$$

例題の有限要素 $mesh$ は Fig-2 に示されており, 材料定数は $K = 1500 \text{ kg/cm}^2$, $p_1 = 3700 \text{ kg/cm}^2 \cdot \text{min}$, $q_0 = 1800 \text{ kg/cm}^2$, $q_1 = 9250000 \text{ kg/cm}^2 \cdot \text{min}$ である。例題の有限要素解と解析解 (10) を比較し Fig-3 に示す。この結果, 本論文で用いた手法が全時間領域に渡り非常に精度良く変位解を表わしていることがわかると思う。

4. 結論 紙面の都合上数式を並べただけに終ったが, ここで用いた方法では, 一度固有値及び固有ベクトルを求めれば, 時間による解の変化は (11) 式を各時刻で計算すれば良いだけなので, 時間増分ごとにマトリクスを組み直したり, 並行列を計算したりする必要がなく短時間に解を求めることが出来る。逆に欠点は, 全ての固有値, 固有ベクトルを計算するわけにはいかないので, 時々として主要な固有値を取り出す可能性あることである。

参考文献, [1]: 例えは, W. フレゲ 粘弾性学 (過奉社訳)

[2]: 田中豊彦, 第3回マトリクス構造解析講義集 (1969)

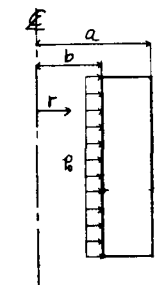


Fig-1 内圧を受ける厚肉中空円筒

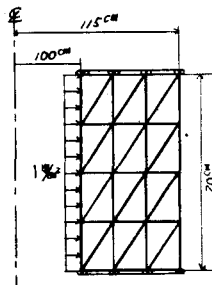


Fig-2 Finite Element Mesh

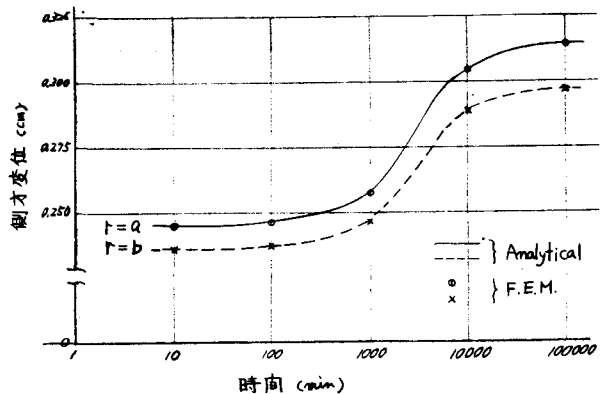


Fig-3 解析解とF.E.M.解の比較