

センチュリ リサーチ センタ(株) の正員 斎藤 昭弘

〃 小笠原 正人

〃 武田 洋

1. まえがき

非定常熱問題の様な時間依存の問題に対する数値解析では、空間変数に対して有限要素法、時間変数に対して差分法を用いて離散する有限要素-差分混合法が広く用いられている。例えば熱応力解析を行う場合、熱方程式は応力解析のための温度分布を決定するために前準備的に解析される場合がほとんどであり、その空間モデルも応力解析に用いるものと同じのものが用いられる場合が多い。このように時間依存問題に対して、その空間の有限要素モデルが決定された場合、その時間変数に対する離散モデルである時間増分については、安定性の見地から種々の要素についての上下限が論じられており、また、最大原理の観点から定むべき要素の上下限が論じられている。なお、ここでは線形要素および2次要素に着目し、空間モデルに対応する時間増分について、その補間関数と厳密解との対比により考察する。

one dimensional problem

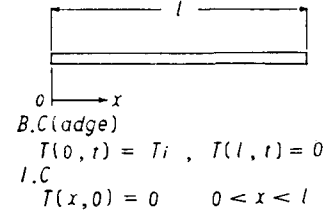


図1 1次元モデル

linear element

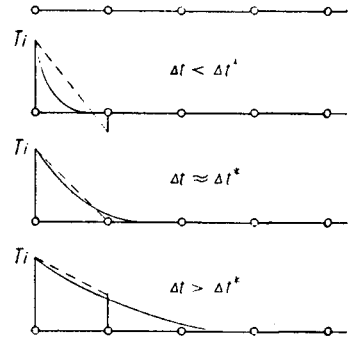


図2 1次要素

quadratic element

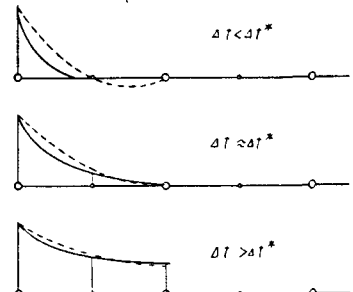


図3 2次要素

2. 有限要素方程式と厳密解

熱方程式を空間について有限要素離散すると次式が得られる。

$$[K]\{T\} + [C]\{\dot{T}\} = \{Q\} \quad (1)$$

(1)式を時間変数について差分離散する。ここでは一般化

Crank-NicolsonのSchemeを用いると次式を得る。

$$(\beta[K] + \frac{1}{\Delta t}[C])\{T\}_{x+\Delta x} = (- (1-\beta)[K] + \frac{1}{\Delta t}[C])\{T\}_x + \beta\{Q\}_{x+\Delta x} + (1-\beta)\{Q\}_x \quad (2)$$

(2)式を用い、時間方向に段階的に解く場合、時間増分 Δt が問題になる。この時間増分 Δt を決める際、空間モデルとの関連が重要になる。ここでは1次元問題に対する厳密解と、有限要素モデルにより得られる解との比較を通し、最適な時間増分 Δt^* の選択について考察したい。図1に示すような境界条件のもとでは、有限要素モデルと時間増分の関係は図2、3のようになる。図で解るように、要素の温度分布は $\Delta t \approx \Delta t^*$ において自然に近い分布を示している。次に1次元問題に対する厳密解を考える。

1次元熱方程式は次式で与えられる。内部発熱はないものとする。

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}; \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \quad (3)$$

ここで k は熱伝導率、 c は比熱、 ρ は密度である。境界条件および、初期条件は図1と同様とする。この場合の厳密解は(4)式となる。

$$T(x, t) = T^\infty(x) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_l}{n} \sin \frac{n\pi}{l} x \exp(-n^2 \pi^2 F_0) \quad (4)$$

ただし、 T^∞ は定常解、 F_0 はFourier数であり、それぞれ次のようになる。

$$T^\infty(x) = (1 - \frac{x}{l}) T_l \quad (5)$$

$$F_0 = kx / \rho c l^2 \quad (6)$$

式(4)と解き、代表的時間における温度分布を図4に示す。また図5に、有限要素補間に対応する厳密解（ここで h は1次要素および Q は2次要素を示す）を示す。図4より、1次要素の場合は2要素で2次要素の場合は1要素で表わし得る範囲は、

$0.01 < Fo < 0.1$ と考えられる。以下にこのように分割したときの1次および2次要素について考察する。

3. 1次要素に対する考察

図5より1次要素の表わし得る温度分布は $Fo \approx 0.04 \sim 0.05$ と考えられる。ここで $Fo = 0.05$ をとれば以下の様になる。

$$\frac{h \Delta t^*}{c p (2h)^2} = 0.05 \quad (7)$$

$$\Delta Fo^* = \frac{h \Delta t^*}{c p h^2} = 0.2 \quad (8)$$

$$\Delta t^* = \frac{1}{5} \frac{c p h^2}{h} \quad (9)$$

ここで $h = l/2$ である。

4. 2次要素に対する考察

2次要素の場合は1次要素と異なり、その要素内部の温度分布は単調でない場合もある。ここでは2次要素の空間モデルに対応する時間増分として、その要素内部の温度分布が単調となる場合について考える。補間関数は次のようになる。

$$T = \left[\left(1 - \frac{2}{l}x\right)\left(1 - \frac{x}{l}\right), \frac{4x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right), \frac{x}{l}\left(1 + \frac{2x}{l}\right) \right] \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

ここで、 $T_3 = 0$, $dT/dx \leq 0$; ($0 < x < h$) となるためには

$T_2 \geq T_1/4$ である必要がある。これに対応する分布を図5より求めると、 $Fo \approx 0.09$ となる。1次要素と同様に Δt^* を求めると、次のようになる。

$$\Delta t^* \approx \frac{9}{100} \frac{c p h^2}{h} \approx \frac{1}{10} \frac{c p h^2}{h} \quad (11)$$

5. 係数マトリックスの条件数について（参考）

(2)式の左辺に於ける係数マトリックスの条件数に着目してみる。 $c = 0.135$, $p = 0.783$, $h = 0.5 \times 10^{-5}$, $l = 10.0$ (単位 Kcal, mm, kg, sec) とし、 β は0.5とおき ($\beta [K] + \frac{1}{\Delta t} [C]$) の条件数を Δt をパラメータとして計算したときの値を、図6および図7に示す。上で提案した(9)および(10)式を用いて計算した Δt^* のところでほぼ最小値を示していることを見ることができる。

6. あとがき

時間増分の選び方についての一方法について述べてきた。係数マトリックスに含まれるフーリエ数より1次元問題の場合の1次要素、2次要素に対する時間増分 Δt^* を提案したが、これは2次元問題にも拡張可能と思われる。

参考文献 [1] 武田 洋 “非定常熱方程式に対する有限要素モデルと時間ステップに関する考察” (鋼構造協会第11回大会, マトリックス解析法研究 5.52年) [2] 小笠原, 武田, 青藤 “熱方程式解析のための有限要素モデルと時間増分について” (土木学会第32回講演集)

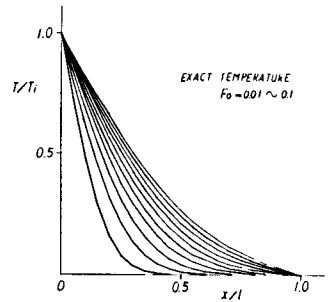


図4 1次元温度分布

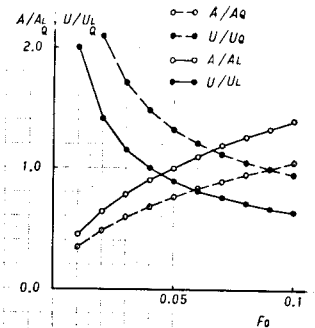


図5 有限要素補間に対応する厳密解

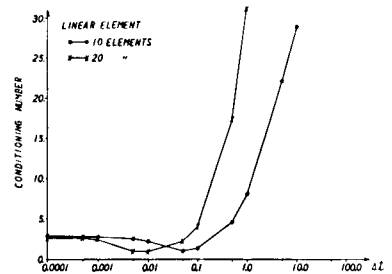


図6 1次要素の条件数

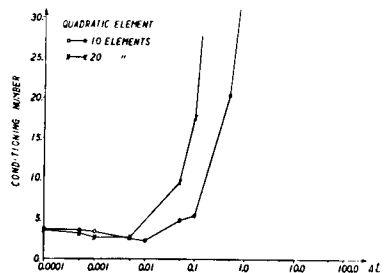


図7 2次要素の条件数