

中大理工・土木 (E) 中澤晶平[○] (E) 川原謙人1. 緒言

複雑な形状の構造物に荷重荷重が加わるときの挙動を解析すると、構造物の有限要素分解を考えた、この上で熱方程式を解く、更に同一の要素分割のもとで応力解析を行なうことはいはばある。特に、荷重として系に与えられる温度条件が厳しい場合には、材料特性の温度依存性は無視できないことも多い。熱伝導に関する材料の性質は温度によって著しく変化する場合には、熱方程式は非線形となり、その数値的取り扱いはやや複雑になる。従来、有限要素法によって熱方程式を解く場合には、未知関数を時間と空間に逐次分離し、空間を Galerkin 有限要素法により離散化、時間に対しては Crank-Nicolson 型の陰的差分公式を用いることが一般的であった。この方法は、ある意味で無条件安定な公式に持ること知られているが、実用性の解を得るためにはやや厳しい条件が存在することによって式(4)によって確かめられている。ここでは、非線形方程式に陰的差分公式を用いると各時刻毎に連立方程式を解く煩瑣が必要になることより、計算時間の点でやや有利な陽型の差分公式による逐次時間積分型の有限要素法の熱方程式への適用を考える。

2. 基礎方程式と初期条件、境界条件

R^N の有界領域 Ω で、非線形熱方程式(1)を考える。ここで同一項二線形に現われる係数については $1 \leq i \leq N$ までの総和を取ることにしておく。

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v^2 \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = 0 \quad ; \quad v^2 = k_0 + k_1 u \quad \text{in } \Omega$$

初期値分布は(2)で与えられ、境界条件は(3)および(4)で与えられるものとしておく。

$$(2) \quad u = u_0 \quad \text{in } \Omega \quad (3) \quad u = \tilde{u} \quad \text{on } \partial\Omega_1$$

$$(4) \quad v^2 \frac{\partial u}{\partial n} = \tilde{q} \quad \text{on } \partial\Omega_2 \quad (5) \quad v^2 \frac{\partial u}{\partial n} = a u + g \quad \text{on } \partial\Omega_3$$

ここで、 $u = u(x, t)$ は未知の量、 v^2 は非負の熱伝導率係数を示す。また、 $\partial\Omega_1, \partial\Omega_2, \partial\Omega_3$ はそれぞれ重なり合わない、これらの和は Ω の全境界 $\partial\Omega$ を構成する。

3. 半離散 Galerkin 有限要素近似と逐次時間積分公式

u に対して次の仮定を置く。領域 Ω の N 単体による分割を考え、各要素上で2次元の1次多項式に属する試行関数列 $\{\varphi_j\} (j=1, 2, \dots, M)$ を考える。このとき

$$u = \varphi_j(x) u_j(t) \quad ; \quad v = \varphi_k(x)$$

とおけば、(1)の有限要素近似方程式は

$$(6) \quad M_{jk} \frac{du_k}{dt} + K_{jkl} u_k u_l = \Pi_j(u_k) \quad ; \quad K_{jkl} = \int_{\Omega_2} \left(k_0 \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} + k_1 \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \varphi_l \right)$$

ここで M_{jk} は節点の質量マトリックス、 Π_j は境界条件(4)より導かれる荷重 Π_j の集束質量近似変更に持ち込むとき、(6)式に、集束質量マトリックス M_{jk}^{-1} を用いて

$$(7) \quad \left(\frac{du_k}{dt} \right)^m = \tilde{M}_{jk}^{-1} (\Pi_j(u_k) - K_{jkl} u_k u_l)^m \quad \text{at } t = m \Delta t$$

と分断した Δt に対しては、次の前進差分スキーム(7)または Adams-Bashforth スキーム(8)が採用される。

$$(7) \quad (u_k)^{m+1} = (u_k)^m + \Delta t \left(-\frac{du_k}{dt} \right)^m \quad (8) \quad (u_k)^{m+1} = (u_k)^m + \Delta t \left\{ \left(\frac{3}{2} \right) \left(\frac{du_k}{dt} \right)^m - \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{du_k}{dt} \right)^{m-1} \right\}$$

すなわち、(7)または(8)に(7)を代入すれば、時刻 $m \Delta t$ までの u_k を用いて $(m+1) \Delta t$ の値を求められる。

4. 離散モデルの安定と収束

最も単純な1次元熱方程式を区間 $[0, 1]$ で考える。この区間を n 等分し各 n の小区間の大きさを Δx と書くならばの式に対応する差分式が

$$(9) \quad u_i^{n+1} = u_i^n - \mu \{-u_{i-1}^n + 2u_i^n - u_{i+1}^n\}$$

となる。ここで $\mu = \Delta t / \Delta x^2$ である。簡単のため $\nu \equiv 1$ なる無次元化された線形の熱方程式を考えれば、1イマンの安定条件より(9)式に対して(10)式、また(10)式に対応する差分式の安定条件が(11)式のようになる。

$$(10) \quad \mu \leq 1/2$$

$$(11) \quad \mu \leq 1/3$$

図1には安定限界における数値解の挙動を示した。(a) は $\mu = 1/2$ の場合であってスキーム内の不安定領域となるばかりで安定限界での挙動を示している。(b) は $\mu = 1/3$ の場合の数値解の挙動であってスキームの計算状態となるばかりで十分安定範囲となっている。何れも、安定範囲で用いるならば各節点での計算値は ∞ における解に漸近することの数値実験により確かめられた。

非線形方程式に対して1イマンの条件を適用するとスキーム内の安定条件に対応する表現節点番号 u_i^n を含み

$$(12) \quad \mu \leq 1/(2 + n u_i^n)$$

となる。ここで、(a) は熱伝導方向の温度に関する0次の項で1次の項を除いたもの。最大値原理の教える所では、全空間全時刻の節点番号の最大値は境界温度の最大値に等しいことより(12)の安定条件を実用上の指標とすることになる。

5. 数値解析例とアルゴリズムの評価

表2図

に単純な形状の2次元領域に対する非線形解析の一例を示す。熱伝導率は $k_0 = k_1 = 1.0$ とした。図中のa)は要素分割を示しb)の計算の結果得られた温度分布の時刻歴を示す。数値的に求められた非定常解の極限としての定常解は、解析的に求められたそれらの値と非常に一致を示している。その他の例題として低温の物体と瞬間的に接触するコンクリート構造物の挙動を扱う問題は取り扱われた。これらの結果より、ここで提案するアルゴリズム (b) と (c)、または (b) と (d) は計算時間が短縮できること、また計算機の記憶容量を節約できるという点で、特に非線形性の強い方程式を取り扱う場合には、Crank-Nicolson 型のスキームを用いる有限要素法に比べ有利であることが確かめられた。

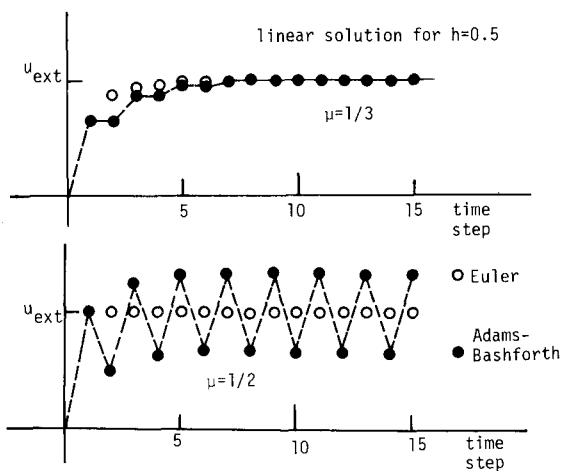
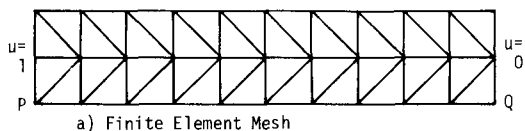


Fig.1 Critical Behavior of Numerical Solution



a) Finite Element Mesh

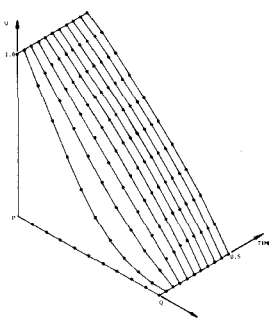


Fig.2 An Example of Two Dimensional Nonlinear Analysis

(1) 小栗原, 武田, 斎藤: 熱方程式解析のための有限要素モデルと時間増分について, 土木学会第22回年講第1部門, p127 (1977)