I-32　非線形問題の数値解析に関する考察

センチュリリサーチセンタ(株)　正員　武田　洋

1. 緒言

構造物を取巻く環境は近年複雑の一途をたどっており、土木工学の分野だけでなくあらゆる工学の分野において、健全なる構造設計を行うためには、その非線形挙動の把握は必要不可欠といっても過言ではない。現在では電子計算機の普及、発展と有限要素法などの離散化手法の開発により、多くの非線形問題が数値的に解析されている。構造分野における非線形解析の手法を大別すると反復法と増分法であり、両者の組み合せも広く用いられているが、弾塑性問題などのように履歴依存の場合には増分法を余儀なくされる。一般に増分法を用いる場合、微少増分形式で記述された基礎方程式はなんらかの有限増分を基本にして解析されるが、微少増分形式と有限増分形式の間の関連についての考察は十分であるとは云えない。ここでは有限要素法による熱弾塑性問題および幾何学的非線形問題を例に基礎方程式と有限増分形の関連について論じる。

2. 熱弾塑性問題に対する考察

ここでは増分理論による弾塑性解析について考察する。微少増分形式での構成方程式は一般的に次のように与えられる（たとえば文献[1]）。

$$d\{\sigma\}=[E^{ep}]d\{\varepsilon^{ep}\}+\{\psi_T^{ep}\}dT+\{\psi_j^{ep}\}d\theta_j+\{g_k^p\}d\xi_k \quad (1)$$

ここで d は微少増分を表わし、$\{\sigma\}$ は応力、$\{\varepsilon^{ep}\}$ は弾塑性ひずみ、T は温度、θ_j は温度以外の状態変数、ξ_k は降伏面に関する付加的パラメータである。また

$$[E^{ep}]=[E^e]-\frac{[E^e]\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}\right\}\left\{\frac{\partial f^*}{\partial\sigma}\right\}[E^e]}{-\left\{\frac{\partial f^*}{\partial\varepsilon^p}\right\}^t\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}\right\}+\left\{\frac{\partial f^*}{\partial\sigma}\right\}^t[E^e]\left\{\frac{\partial\Phi^p}{\partial\sigma}\right\}} \quad (2)$$

であり、$[E^e]$ は弾性構成方程式における係数マトリックス、Φ^p は塑性ポテンシャル、f^* は降伏関数である。$\{\psi^{ep}\}$ は材料の温度依存性から導びかれるものであり、$\{\psi_j^{ep}\}$ は材料が温度以外の状態変数 θ_j に依存する場合に導びかれるものである。

$$\{\psi_T^{ep}\}=\{\psi_T^e\}+\{\psi_T^p\}\ ;\ \{\psi_j^{ep}\}=\{\psi_j^e\}+\{\psi_j^p\} \quad (3)$$

ここで

$$\{\psi_T^e\}=\frac{\partial[E^e]}{\partial T}\{\varepsilon^e\},\ \{\psi_j^e\}=\frac{\partial[E^e]}{\partial\theta_j}\{\varepsilon^e\} \quad (4)$$

$$\{\psi_T^p\}=-\frac{[E^e]\left\{\frac{\partial\Phi^p}{\partial\sigma}\right\}\left[\left\{\frac{\partial f^*}{\partial\sigma}\right\}^t\{\psi_T^e\}+\frac{\partial f^*}{\partial T}\right]}{-\left\{\frac{\partial f^*}{\partial\varepsilon^p}\right\}^t\left\{\frac{\partial\Phi^p}{\partial\sigma}\right\}+\left\{\frac{\partial f^*}{\partial\sigma}\right\}^t[E^e]\left\{\frac{\partial\Phi^p}{\partial\sigma}\right\}} \quad (5)$$

$$\{\psi_j^p\}=-\frac{[E^e]\left\{\frac{\partial\Phi^p}{\partial\sigma}\right\}\left[\left\{\frac{\partial f^*}{\partial\sigma}\right\}^t\{\psi_j^e\}+\frac{\partial f^*}{\partial\theta_j}\right]}{-\left\{\frac{\partial f^*}{\partial\varepsilon^p}\right\}^t\left\{\frac{\partial\Phi^p}{\partial\sigma}\right\}+\left\{\frac{\partial f^*}{\partial\sigma}\right\}^t[E^e]\left\{\frac{\partial\Phi^p}{\partial\sigma}\right\}} \quad (6)$$

$$\{g_k^p\}=-\frac{[E^e]\left\{\frac{\partial\Phi^p}{\partial\sigma}\right\}\frac{\partial f^*}{\partial\xi_k}}{-\left\{\frac{\partial f^*}{\partial\varepsilon^p}\right\}^t\left\{\frac{\partial\Phi^p}{\partial\sigma}\right\}+\left\{\frac{\partial f^*}{\partial\sigma}\right\}^t[E^e]\left\{\frac{\partial\Phi^p}{\partial\sigma}\right\}} \quad (7)$$

(1)　流れ則の有限化

式(1)に微少増分の構成方程式を示すが、これは次に示すPrandtl-Reussの流れ則を基本としている。

$$\{\dot\varepsilon^p\}=\dot\lambda^p\left\{\frac{\partial\Phi^p}{\partial\sigma}\right\}=\dot\lambda\{n\}\quad 又は\quad d\{\varepsilon^p\}=\{n\}d\lambda^p \quad (8)$$

ここで時間 t_0 から t_1 において増分が有限であるとすると

$$\Delta\{\varepsilon^p\}=\int_{t_0}^{t_1}\{\dot\varepsilon^p\}dt=\int_{t_0}^{t_1}\dot\lambda^p\{n\}dt \quad (9)$$

が得られる。式(9)を部分積分すると

$$\Delta\{\varepsilon^p\}=\lambda^p\{n\}\Big|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}\lambda^p\{\dot n\}dt$$
$$=\lambda_1^p\{n\}_1-\lambda_0^p\{n\}_0-\lambda_\alpha^p\{\dot n\}_\alpha\Delta t \quad (10)$$

ここで

$$\lambda_1^p=\lambda_0^p+\Delta\lambda^p\ :\ \{n\}_1=\{n\}_0+\Delta\{n\}\ :$$
$$\lambda_\alpha^p=(1-\alpha)\lambda_0^p+\alpha\lambda_1^p=\lambda_0^p+\alpha\Delta\lambda^p,\ \{\dot n\}_\alpha=\frac{\Delta\{n\}}{\Delta t}$$

と仮定することにより次式が得られる。

$$\Delta\{\varepsilon^p\}=\Delta\lambda^p[\{n_0\}+(1-\alpha)\Delta\{n\}] \quad (11)$$

これは増分間の状態の変化に線形の仮定を導入した場合の有限増分の流れ則と解釈できる。

(2)　有限増分の熱弾塑性構成方程式

ここでは降伏関数が次のように与えられるものとする。

$$f^*(\sigma,\varepsilon^p,T,\theta_j,\xi_k)=0 \quad (12)$$

増分の間で負荷状態であるとすると次式が成立する。

$$\Delta f^*=\left\{\frac{\partial f^*}{\partial\sigma}\right\}_\beta^t\Delta\{\sigma\}+\left\{\frac{\partial f^*}{\partial\varepsilon^p}\right\}_\gamma^t\Delta\{\varepsilon^p\}+\left(\frac{\partial f^*}{\partial T}\right)_\delta\Delta T$$
$$+\left(\frac{\partial f^*}{\partial\theta_j}\right)_\zeta\Delta\theta_j+\left(\frac{\partial f^*}{\partial\xi_k}\right)_\eta\Delta\xi_k=0 \quad (13)$$

式(10)を式(3)に代入し，$\Delta\lambda^P$を求めると次のようになる。

$$\Delta\lambda^P = \frac{1}{\left(\left\{\frac{\partial f^*}{\partial\sigma}\right\}_\beta [E_0^e] - \left\{\frac{\partial f^*}{\partial\varepsilon^P}\right\}_\delta^t\right)\left(\{n\}_0 + (1-\alpha)\Delta\{n\}\right)}$$
$$* \left[\left\{\frac{\partial f^*}{\partial\sigma}\right\}_\beta^t [E^e]\Delta\{\varepsilon^{eP}\} + \left(\left\{\frac{\partial f^*}{\partial\sigma}\right\}\{\psi_T^e\}_\chi + \left(\frac{\partial f^*}{\partial T}\right)_\delta\right)\Delta T\right.$$
$$\left. + \left(\left\{\frac{\partial f^*}{\partial\sigma}\right\}_\beta^t\{\psi_j^e\}_\omega + \left(\frac{\partial f^*}{\partial\theta_j}\right)_\varsigma\right)\Delta\theta_j + \left(\frac{\partial f^*}{\partial\xi_k}\right)_\eta \Delta\xi_k\right] \qquad (14)$$

ここで応力－ひずみ関係は次のように表わせる。

$$\Delta\{\sigma\} = [E_0^e](\Delta\{\varepsilon^{eP}\} - \Delta\{\varepsilon^P\}) + \{\psi_T^e\}_\delta \Delta T + \{\psi_j^e\}_\omega \Delta\theta_j \qquad (15)$$

ここで式(15)に式(11),(14)を代入すると次式が得られる。

$$\Delta\{\sigma\} = \left([E_0^{eP}] + \Delta[E^P]\right)\Delta\{\varepsilon^{eP}\} + \left(\{\psi_T^{eP}\}_0 + \Delta\{\psi_T^{eP}\}\right)\Delta T$$
$$+ \left(\{\psi_j^{eP}\}_0 + \Delta\{\psi_j^{eP}\}\right)\Delta\theta_j + \left(\{g_k^P\} + \Delta\{g_{k}^P\}\right)\Delta\xi_k \qquad (16)$$

(3) 有限要素方程式

有限要素系の平衡方程式は次のように表わせる。

$$\int [B]^t \Delta\{\sigma\} dV = \Delta\{\hat{P}\} + \{\hat{R}\} \qquad (17)$$

ここで上式に式(16)を代入すると次式が得られる。

$$[k_0]\Delta\{\hat{u}\} = \Delta\{\hat{P}\} + \{\hat{R}\} + \Delta\{\hat{a}\} \qquad (18)$$

上式で$\Delta\{\hat{a}\}$は有限増分によって生じる誤差に対する測度と考えられる。

3. 幾何学的非線形問題に対する考察

Lagrange 表示を用いるものとするとひずみは次のようにマトリックス表示できる。

$$\{\varepsilon\} = [L]\{d\} + [d]^t[M]\{d\} \qquad (19)$$

ここで$\{d\}$は変形勾配であり次のように節点変位と関係づけられる。

$$\{d\} = [D]\{u\} = [D][N]\{\hat{u}\}$$
$$\Delta\{d\} = [D]\Delta\{u\} = [D][N]\Delta\{\hat{u}\} \qquad (20)$$

(4) 状態決定のための方法

一般の変位法による場合，要素節点の変位$\Delta\{\hat{u}\}$が定まった後，全ひずみが求まり，弾塑性ひずみが定まり，続いて応力状態が決定される。その応力状態によって塑性ひずみの量が定められる。要素が負荷状態にある場合，上述の方法により決定された増分後の状態は必ずしも負荷関数を満足しない。従って負荷関数を満足するように状態を決定するのが望ましい。ここで論理的に状態を決定する方法を移動硬化の場合について図1に示す。

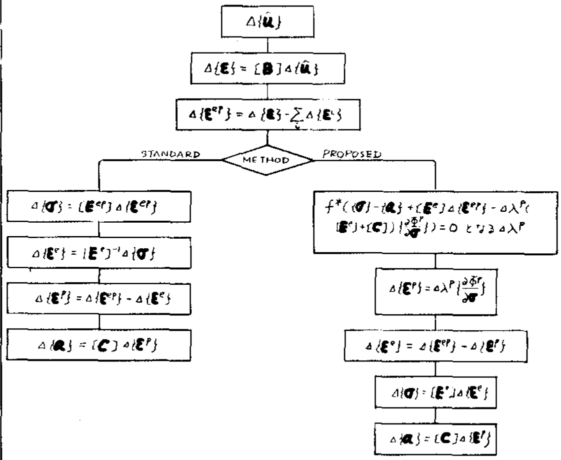

図1　状態決定のためのアルゴリズム

一方，有限増分を考慮すると式(19)は次のようになる。

$$\Delta\{\varepsilon\} = [L]\Delta\{d\} + 2[d]^t[M]\Delta\{d\}$$
$$+ \Delta[d]^t[M]\Delta\{d\} \qquad (21)$$

従って節点変位との関係は次のようになる。

$$\Delta\{\varepsilon\} = [B_0]\Delta\{\hat{u}\} + [\hat{u}]^t[B_1]\Delta\{\hat{u}\}$$
$$+ \Delta[\hat{u}]^T[B_2]\Delta\{\hat{u}\} \qquad (22)$$

この関係より有限増分の剛性関係が導びかれる。

4. 結言

ここでは構造力学の分野における代表的な非線形問題の数値解析における支配方程式について有限増分との関連で論じた。また非線形問題の数値計算法の範囲だけでなく，力学的状態を考慮に入れる修正法を材料非線形問題について提案した。なお幾何学的非線形問題に対しては紙面の都合により詳細に記すことが出来なかった。

参考文献

(1) 武田，岩田"有限要素法による熱非弾性解析理論の汎用化について"日本鋼構造協会，STAN資料，1976

(2) Zudans, Z, et, al "Elastic-Plastic Analysis of High Temperature Nuclear Reactor Component" Nucl, Eng. Des, Vol 28, 1974

(3) 武田"有限要素法による形状の表現について"土木学会才30回年次学術講演会 I-37, 1975