I-29　　有限変位問題の数値解析に関する一考察

東京大学　学生員　岩熊　哲夫
東京大学　正　員　西野　文雄

1。まえがき

外力の作用により物体が変形してつり合った時，力は変形後の形状においてつり合っている。この変形後の形状においてつり合いを考えるのが有限変位理論であり，近似的に変形前の形状においてつり合いを考えるのが微小変位理論と呼ばれる。構造解析において，例えば座屈現象のように，この2つの理論によって得られる結果の差が大きく，問題となる場合がある。この差を求めるために有限変位理論を解く必要が生ずる。有限変位理論の支配方程式は一般に高次の非線形式となり，解析的に解くことが困難であるため数値解析を用いなければならないことが多い。有力な数値解析法のひとつとして有限要素法があるが，この方法を単純に用いて得られる代数方程式は煩雑な高次非線形式となるため，一般に節点変位の高次項をある程度無視することが多く，そのままでは限られた問題に対してしか適用できない。

一般に鋼およびコンクリートでできた構造物中に生ずるひずみは微小である。この性質に注目して任意点の変位成分を，有限な剛体回転変位成分とひずみに寄与する微小変位成分とに分解して構造物の変形を考える。この方法によって得られる非線形代数方程式は比較的簡単な表示で，変位の高次項も適切に考慮したものになる。このような，いわゆる有限回転微小ひずみ問題の定式化は古くから行なわれている[a)]一方，数値解析にこの性質を考慮した方法に Saafan[b)] らの報告がある。シェル理論に対して厳密にこの方法を適用した報告もある。[c)] ここでは，解析法の近似と，例題として一軸曲げ棒理論を解き考察を加える。

2。解析法における近似

3次元物体の一領域を取り出し，変位 $\mathbb{u}$ が生じてつり合った状態を考える(図1)。Green のひずみテンソル成分で微小ひずみの条件を表わすと，変位前後の基底ベクトル $\mathring{g}_i, G_i$ を用いて次式となる。

$$|e_{ij}| = \frac{1}{2}| G_i \cdot G_j - \mathring{g}_i \cdot \mathring{g}_j | << 1 \qquad (1)$$

式(1)は，変位後の基底ベクトルの大きさが単位に近く，お互いに直交に近いことを示している。考えている領域を剛体回転した後の基底ベクトルを g_i とし，ひずみに寄与する変位成分 v を g_i で分解して $\sum_{i=1}^{3} v_i g_i$ と成分表示すると Green のひずみテンソル成分は，

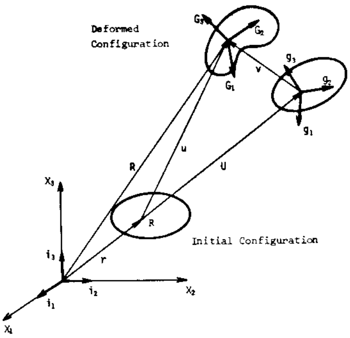

図1.　変形

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(G_i \cdot G_j - g_i \cdot g_j) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right) \qquad (2)$$

と表わすことができる。一方，式(1)より G_i はお互いに直交に近いから，g_i をできるだけ G_i に近づけて，

$$\left| \frac{G_i}{|G_i|} \cdot g_j - \delta_{ij} \right| = \left| \frac{1}{|G_i|}\left(\delta_{ji} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \delta_{ij} \right| << 1 \qquad (3)$$

となるように選ぶことができ，このようにすると，式(2)の右辺第3項は第1,2項に比べて無視できて，

$$e_{ij} \simeq \epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2}(G_j \cdot g_i + g_j \cdot G_i) \qquad (4)$$

と，v_i に関して線形近似することができる。すなわち，微小ひずみの条件より，ひずみに寄与する変位成分とひずみの関係式は線形化することができ，$\mathring{g}_i$ から g_i への有限な剛体回転を考慮することにより，全体として有限

変位を表わしている。

有限要素法の手法に従えば各領域で $\mathbf{g}_i$ を選び，式(4)のひずみ変位関係を用いて各領域毎のポテンシャルあるいは仮想仕事式を算定し，いわゆる要素剛性方程式を求める。各領域毎に $\mathbf{g}_i$ を選ぶから，全体変位の連続性によって，ひずみに寄与する変位成分 v に関しては領域間で不連続となる。全体変位に関しては有限回転変位が，$\mathbf{g}_i$ を選ぶことによって考慮されているため非線形性を含むことになる。この近似は，曲がり梁の折れ線近似と類似している。この方法によって得られる要素剛性行列は，微小変位理論による剛性行列と，$\hat{\mathbf{g}}_i$ と $\mathbf{g}_i$ との方向余弦行列（座標変換行列）との積で表わされ，ここで述べたような操作をしない有限要素法による剛性方程式に比べて簡略な表示の非線形代数方程式となり，しかも有限な回転変位の影響を考慮している。

3. 一軸曲げ棒理論

2で述べた手法を，一軸曲げおよび軸力を受ける棒の有限変位問題に応用する。[d)] 長さ ℓ の領域で，左右端での値をそれぞれ，「1」「2」の指標で表わすと，$\hat{\mathbf{g}}_i$ 方向の要素剛性方程式は次式で表わすことができる。

$$\begin{Bmatrix} \mathbb{F}_1 \\ \mathbb{F}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{T}^T & 0 \\ 0 & \mathbb{T}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & \mathbb{k} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{T} & 0 \\ 0 & \mathbb{T} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbb{U}_2 - \mathbb{U}_1 - \mathbb{R} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbb{F}_1^{\circ} \\ \mathbb{F}_2^{\circ} \end{Bmatrix} \qquad (5)$$

ここに，$\mathbb{F}^{\circ}$ は分布外力による等価節点力である。$\mathbb{k}$ は微小変位理論における剛性行列を表わし，さらに，

$$\mathbb{F}^T = \lfloor N \;\; V \;\; M \rfloor \qquad \mathbb{U}^T = \lfloor w \;\; v \;\; -\alpha \rfloor$$

$$\mathbb{R} = \begin{Bmatrix} \ell(\cos\alpha_1 - 1) \\ \ell\sin\alpha_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \mathbb{T} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 & 0 \\ -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

と定義され，N, V, M はそれぞれ，軸力，せん断力，曲げモーメント外力，w, v, α はそれぞれ，軸方向，横方向変位および軸の回転変位を示す。式(5)は，ℓ を小さくすることによって，微小ひずみのもとでのつり合い微分方程式に収束する。式(6)を用いて，図2に示したような 200×200×8×12 のH形鋼で長さ10 m の片持ち梁の自由端に，$\bar{M}$ = 0.5 t-m，$\bar{N}$ を作用させた時の変位を，Newton-Raphson 法で解いた結果を示す。破線は厳密な微分方程式を，数値積分を用いて境界値問題として解いた結果で，厳密解と考えると，分割数を増やすことによって収束する状況が明らかである。ここに，N_{cr} は Euler 座屈荷重である。

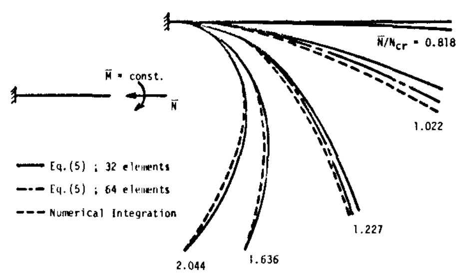

図2. 片持ち梁の変位

4. 結語

現在，広く用いられている近似法の定式化を幾何学的に明確に示すことができた。しかしながら，直観によって，式(5)に準じたものを得た場合，それが有限な回転変位を考慮しているか否かが不明である場合があり，基本となる支配方程式の定式化の段階を経て正確に取り扱うことが必要である。さらに，棒の2軸曲げにおける軸力のつくるねじれ力のように，ここで説明した手法で線形化できない項があることに注意すべきである。この方法は，ひずみが微小であれば，材料非線形性も含む問題に応用することも期待できる。

＜参考文献＞

(a) Toupin, R.A. : The elastic dielectric , J. ration. Mech. Analysis , 5, 849-914 (1956).

(b) Saafan, S.A. : Nonlinear behavior of structural plane frames, J. Str. Div., ASCE, 95, ST12 , 557-579 (1963).

(c) Wempner, G. : Finite elements, finite rotations and small strains of flexible shells, Int. J. Solids, Str., 5 , 117-153 (1969).

(d) 西野他：一軸曲げと軸力を受ける棒の有限変位理論，土木学会論文報告集，第237号，11-26，(1975)。