

東京工業大学 正員 増田陳紀
東京工業大学 正員 吉田 裕
大林組 正員 松田 隆

§1 まえがき 本報告は①面内回転を節点変位成分として有する三角形薄板要素¹⁾(18自由度, FIG.1参照)を用い、②ひずみ変位関係の非線形性は要素の剛体回転によって生ずるとの立場から、直接、全体座標系(以後全体系と呼ぶ)での剛体回転を含む節点変位と、要素と共に移動する要素埋込み座標系(以後要素系と呼ぶ)での剛体回転を含まない節点変位との関係式を新たに誘導し、③この関係式に基づいて増分釣合方程式を定式化し、この方程式の反復収束計算の効率的な計算法を採用することによって、従来の解法に比して非常に大きな変形までも追跡可能で安定な薄肉立体構造の非線形解析法を開発し得た過程および結果について発表するものである。

§2 全体系での節点変位から要素系での節点変位への変換 要素系でのひずみ変位関係は線形であると仮定すると、要素系での節点力増分 $\{\Delta F^*\}$ と節点変位増分 $\{\Delta U^*\}$ とは線形の剛性行列 $[K^*]$ によって次式で関係づけられる。

$$\{\Delta F^*\} = [K^*] \{\Delta U^*\} \quad (1) \quad \{\Delta U^*\} \text{と全体系での節点変位増分}\{\Delta U\} \text{との関係は、次式によって与えられる。}$$

$$\{\Delta U^*\} = [T + \Delta T] \{X + \Delta X\} - [T] \{X\} = [\Delta T] \{X\} + [T + \Delta T] \{\Delta X\} = [\Delta T] (\{\bar{X}\} + \{\bar{U}\}) + [T + \Delta T] (\{\Delta \bar{X}\} + \{\Delta \bar{U}\}) \quad (2)$$

ここに、 $[T]$ は全体系から要素系への座標変換行列、 $[\Delta T]$ はその増分、 $\{\bar{U}\}$ は全体系での節点変位である。また、 $\{X\} = \{\bar{X}\} + \{\bar{U}\}$ 、 $\{\bar{X}\} = \{X_0\}$ 、 $\{\Delta \bar{X}\}$ は $\{\bar{X}\}$ の増分であり、 $\{X_0\}$ は要素の初期座標、 $\{R\}$ は剛体回転を表わす。(FIG.2参照, FIG.2では説明の便宜上、はり要素を用いている。)

§3 増分釣合方程式 要素系での節点力を $\{F^*\}$ 、全体系でのそれを $\{F\}$ とすると、全体系での節点力増分 $\{\Delta F\}$ は、 $\{\Delta F^*\}$ と次の関係がある。 $\{\Delta F\} = \{F + \Delta F\} - \{F\} = [T + \Delta T]^T \{F^* + \Delta F^*\} - [T]^T \{F^*\} = [\Delta T]^T \{F^*\} + [T + \Delta T]^T \{\Delta F^*\} \quad (3)$

式(3)に式(1)、式(2)を代入すれば、全体系での要素増分釣合方程式が次のように得られる。

$$\{\Delta F\} = [\Delta T]^T \{F^*\} + [T + \Delta T]^T [K^*] [\Delta T] (\{\bar{X}\} + \{\bar{U}\}) + [T + \Delta T]^T [K^*] [T + \Delta T] \{\Delta \bar{X}\} + [T + \Delta T]^T [K^*] [T + \Delta T] \{\Delta \bar{U}\} \quad (4)$$

ここで、 $[\Delta T]$ および $\{\Delta \bar{X}\} = \{\Delta \bar{U}\}$ は未知変位 $\{\Delta U\}$ の関数である。

§4 増分釣合方程式の解析過程 式(4)を反復収束計算により次のように解く。釣合経路を示したFIG.3において、いま、 n 段階の釣合状態(A点)が得られているとき、 $n+1$ 段階の釣合状態(H点)を求めるものとする。 オ1近似: $[\Delta T]$ および $\{\Delta \bar{X}\}$ を増分前の状態(A点)で線形化²⁾し、 $[T + \Delta T]$ を n 段階の釣合状態(A点)で評価して解く。 オ2近似: $[\Delta T]$ および $\{\Delta \bar{X}\}$ を、オ1近似に基づき増分間の平均的な変化率を用いて評価(B点で線形化)し、 $[T + \Delta T]$ をオ1近似による変位後の状態(C点)で評価する。 オ $k+1$ 近似($k \geq 2$): 以後の近似においては、変位の関数としての $[\Delta T]$ 、 $\{\Delta \bar{X}\}$ および $[T + \Delta T]$ はいずれも変位増分自身に比して十分に正解に収束していると思われ、前段階の近似値(オ k 近似)を用いる。

§5 計算例 エラスティカの解析例をFIG.4に示す。右の図は荷重～たわみ曲線において矢印で示した点を唯1回の増分(変位制御)で計算したときの収束過程を形状の変化により示した図である。FIG.5は等分布荷重を受ける浅いアーチ板(初期形状はSIN波形)の飛び移りおよび分岐座屈の計算結果である。周辺単純支持の正方形板の一組の対辺を圧縮したときの解析結果をFIG.6に示す。FIG.(a)は荷重～たわみ曲線であり、FIG.(b)はFIG.(a)の一部を拡大して理論解⁴⁾と比較して示した図である。FIG.(c)は変形の進行過程を描いたものである。

§6 あわりに 現実の問題ではここで扱ったような大変形に対しては塑性をも考慮した解析が必要となり、そのような解析も行っているが、ここでは解法の特性を明らかにする目的で、著しい大変形までを弾性として解析した。

参考文献 1) 吉田 雨宮 増田: 立体構造解析のための薄板有限要素, 土論集, No.211, 1973.3. 2) 松田 吉田 増田: 薄肉立体構造の弾塑性大変形解析, 才22 四年誌, I-100, 1977.10. 3) Timoshenko, Gere: Theory of Elastic Stability, McGRAW-HILL. 4) Coan: Large-deflection theory for plates with small initial curvature loaded in edge compression, J. Applied Mechanics, June, 1951.

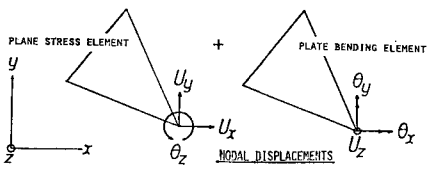


FIG.1 TRIANGULAR PLATE ELEMENT

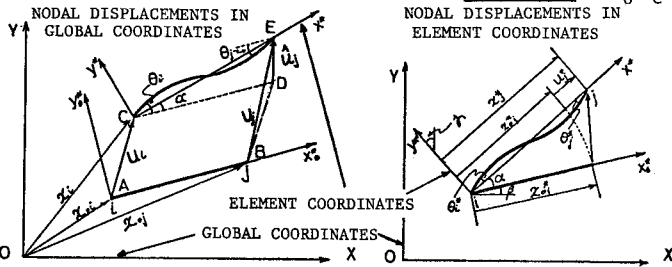
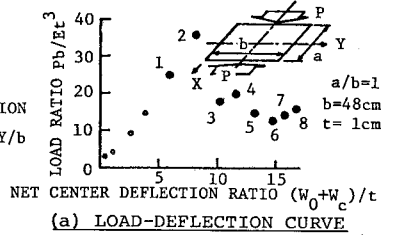
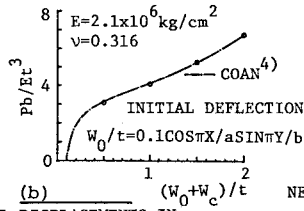


FIG.2 RELATION BETWEEN GLOBAL AND ELEMENT COORDINATES

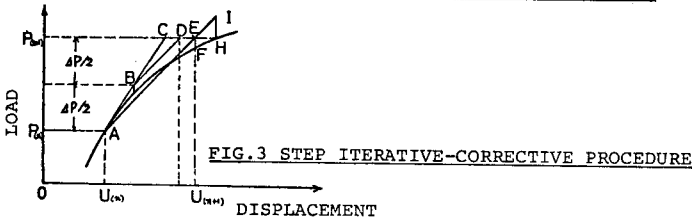


FIG.3 STEP ITERATIVE-CORRECTIVE PROCEDURE

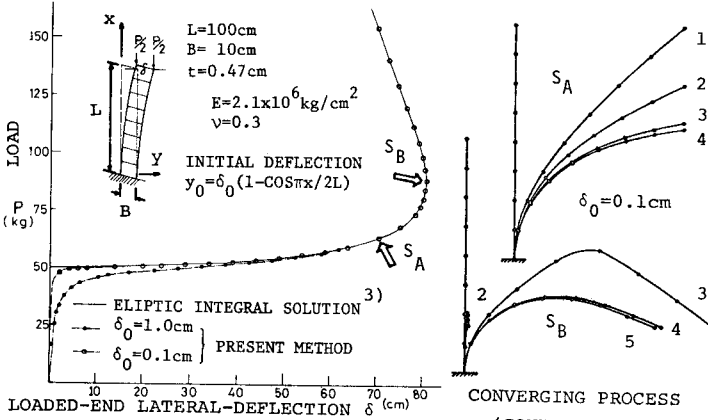


FIG.4 ELASTICA

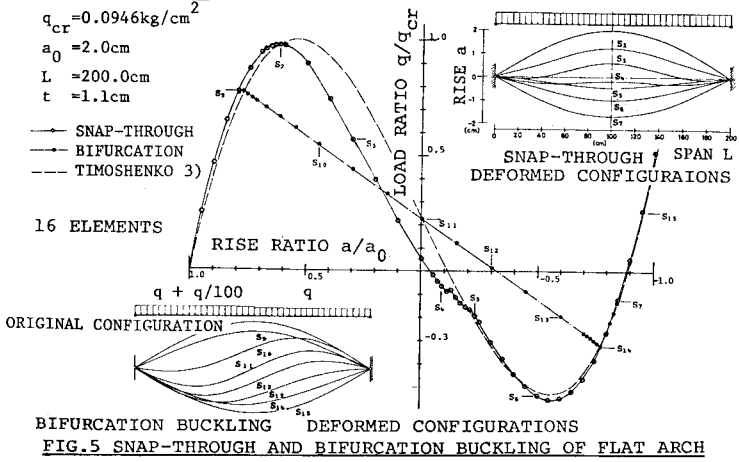


FIG.5 SNAP-THROUGH AND BIFURCATION BUCKLING OF FLAT ARCH

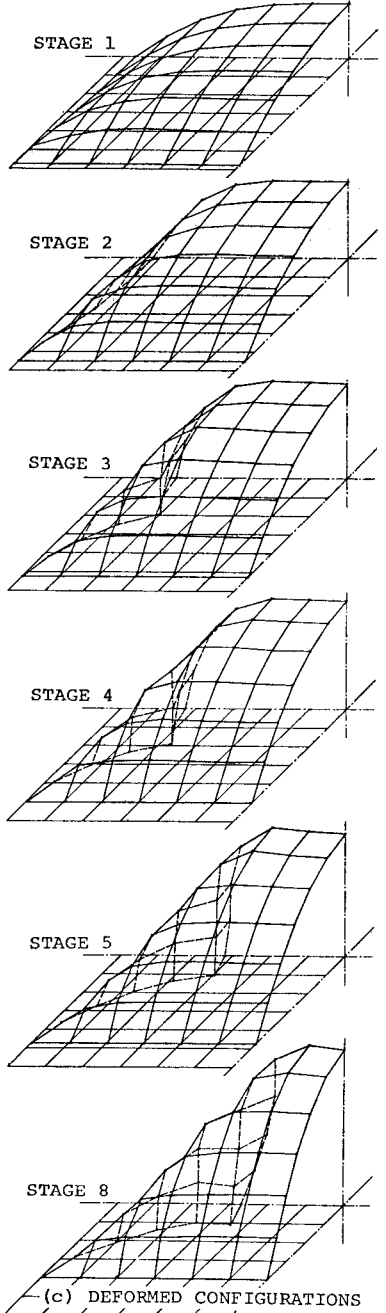


FIG.6 LARGE DEFLECTION ANALYSIS OF SQUARE PLATE LOADED IN EDGE COMPRESSION