I-26

有限変形非弾性理論に関する変分原理

東北大学工学部　正員　○新関 茂

東北大学工学部　正員　佐武正雄

1.) まえがき

連続体の力学的挙動を支配する変分原理の探求は，Euler 以来多くの研究者によって，現在まで続けられている。これらの変分原理は，物体の変形や運動は，エネルギーまたは，エントロピーが最大，最小または停留となる方向に生じるという概念に基づくものである。Prigogine は，Helmholtz の散逸エネルギー最小の定理を Onsager の相反法則に基づいて，温度変化を含む場合に拡張し，エントロピー生成率最小の原理を提案している。しかし，この原理は非平衡な定常状態に対してのみ成立するものである。連続体に関する一般的な変分原理の困難性は，運動方程式の中に，運動エネルギー，保存的エネルギー，散逸エネルギー等に基づく力が同時に含まれていることによるものと考えられる。代表的土木材料である土，岩石，コンクリートなどは非弾性体であり，これらの材料の変形を考える場合，上述のエネルギーは，常に考慮しなければならない力学量である。Vainberg の定理によれば，上記のような場合に対しては，通常の方法では変分原理は存在しないことになる。この一つの打開策として，Schechter, Prigogine 等は局所ポテンシャル法を提案しているが，周知のように，この方法は数学的に特殊な変分計算を含んでいる。しかし，連続体は何らかのエネルギーまたはエントロピーに関し，不経済な運動や変形をするとは考え難い。このような観点から，本文は非線形履歴性材料に対する熱力学的制約条件に基づいて，変分原理を構成し，Vainberg の定理を拡張しようとするものである。

2.) 非線形履歴性材料の基礎方程式

非線形履歴性材料の等温状態における基礎方程式の概要を Eringen[1,2] および Edelen[3] の理論に従って説明する。連続体が占める3次元ユークリッド空間内の領域を $\mathcal{V}$ とし，$\partial\mathcal{V}$ はその境界を表わすものとする。また位置ベクトル $\underset{\sim}{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3)$ と時間 t の関数は全て $\mathcal{V}\times(-\infty,\infty)$ で定義されるものとする。u_i を変位ベクトルとすれば，Green の歪テンソルは，

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}) \qquad (2.1)$$

σ_{ij} を第2 Piola-Kirchhoff の応力テンソル，$\hat{f}_i$ を物体力，ρ を密度とすれば，運動方程式は

$$[\sigma_{ij}(\delta_{kj} + u_{k,j})]_{,i} + \rho\hat{f}_k = \rho\ddot{u}_k \qquad (2.2)$$

ここに，$(\dot{\ })$ は $\partial/\partial t$ を表わすものとする。一般に，履歴性材料においては，時間 t における応力は，全歪履歴 $\gamma^t(s) = \gamma(t-s)$ によって決定され，$\mathfrak{F}_{ij}$ をテンソル値関数とすれば，$\sigma_{ij} = \mathop{\mathfrak{F}_{ij}}_{s=0}^{\infty}[\gamma^t(s)]$ と記すことができる。今，全履歴 $\gamma^t(s)$, $s\in[0,\infty]$ を過去の履歴 $\gamma_r^t(s) = \gamma^t(s)$, $s\in(0,\infty]$ と現在の歪 $\gamma(t) = \gamma^t(0)$ とに分割し，Helmholtz の自由エネルギー関数 $\varphi = \mathop{\mathfrak{P}}_{s=0}^{\infty}[\gamma_r^t;\gamma]$ の存在を仮定する。このとき，$\mathop{\mathfrak{P}}_{s=0}^{\infty}[\gamma_r^t(s);\gamma]$ が十分滑らかな関数ならば，σ_{ij} の可逆的な部分 ${}_E\sigma_{ij}$ は Helmholtz の自由エネルギー関数 φ を用いて

$${}_E\sigma_{ij} = \mathop{\mathfrak{F}'_{ij}}_{s=0}^{\infty}[\gamma_r^t;\gamma] = \rho\,\partial_\gamma \mathop{\mathfrak{P}}_{s=0}^{\infty}[\gamma_r^t;\gamma] \qquad (2.3)$$

によって与えられる。また，同様に，内部散逸エネルギーは θ を絶対温度として

$$\hat{\sigma} = \mathop{\mathfrak{D}}_{s=0}^{\infty}[\gamma_r^t:\gamma] = -\delta_\gamma \mathop{\mathfrak{P}}_{s=0}^{\infty}[\gamma_r^t:\gamma\,|\,\dot{\gamma}_r^t] \qquad (2.4)$$

と記される。ここに，∂_γ は通常の偏微分で，$\delta_\gamma \mathop{\mathfrak{P}}_{s=0}^{\infty}[\cdot:\cdot\,|\,\dot{\gamma}_r^t]$ は γ_r^t に関し線形な Frechet 微分[4] である。ここで，Edelen に従って，散逸ポテンシャル $\mathop{\Lambda}_{s=0}^{\infty}[\gamma_r^t:\gamma]$ を導入すれば，応力テンソル σ_{ij} の不可逆的な部分 ${}_D\sigma_{ij}$ は

$${}_D\sigma_{ij} = \mathop{\mathfrak{F}''_{ij}}_{s=0}^{\infty}[\gamma_r^t:\gamma] = \rho\,\partial_{\dot{\gamma}} \mathop{\Lambda}_{s=0}^{\infty}[\gamma_r^t:\gamma] \qquad (2.5)$$

また，散逸エネルギーは

$$\hat{\sigma} = \mathop{\mathfrak{D}}_{s=0}^{\infty}[\gamma_r^t:\gamma] = \delta_\gamma \mathop{\Lambda}_{s=0}^{\infty}[\gamma_r^t:\gamma\,|\,\dot{\gamma}_r^t] \qquad (2.6)$$

で与えられる。したがって，全応力 σ_{ij} は式(2.3)(2.5)により次式で表わされる。

$$\sigma_{ij} = {}_E\sigma_{ij} + {}_D\sigma_{ij} \qquad (2.7)$$

$\partial\mathcal{V}_u$ を変位が与えられた境界とすれば，変位に関する境界条件は

$$u_i = \hat{u}_i\ , \quad \partial\mathcal{V}_u\times(-\infty,\infty) \qquad (2.8)$$

また，$\partial\mathcal{V}_\sigma$ を表面力の与えられた境界，n_i を単位法線ベクトルとすれば

$$\sigma_{jk}(\delta_{ki} + u_{k,i})n_j = \hat{t}_i\ , \quad \partial\mathcal{V}_\sigma\times(-\infty,\infty) \qquad (2.9)$$

と記される。

3) 非線形履歴性材料の変分原理

前節で略述した基礎方程式に基ずいて，動的非線形履歴性材料の変分原理について述べる．

$$\Lambda_1 = {}^t\{ u_i,\ \sigma_{ij},\ \gamma_{ij} \} \tag{3.1}$$

とおけば，一般化された動的非線形履歴性材料の変分原理は，汎関数

$$J_I[\Lambda_1] = \int_{t_1}^{t_2}\int_{v} \{ \frac{\rho}{2}\dot{u}_m\dot{u}_m - \rho \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathfrak{P}}}[\gamma_r^t ; \gamma] + \rho \underset{s=0}{\overset{\infty}{\Lambda}}[\gamma_r^t;\gamma] + \rho\hat{f}_m u_m + \sigma_{ij}\{\gamma_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})\}\} dv\,dt + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial v_\sigma} \hat{t}_i u_i\,ds\,dt + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial v_u} t_i(u_i - \hat{u}_i)\,ds\,dt \tag{3.2}$$

が，力学的平衡点において，停留値をとることであると表現することができる．ここに，付帯条件は式(2.4)である．上式の才1変分をとれば，

$$\delta J_I = \int_{t_1}^{t_2}\int_{v} \{ (\rho\ddot{u}_m - [\sigma_{ij}(\delta_{mj}+u_{m,j})]_{,i} - \rho\hat{f}_m)\delta u_m + (\gamma_{ij} - \frac{1}{2}[u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j}])\delta\sigma_{ij} + (\sigma_{ij} - \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathfrak{S}}}[\gamma_r^t : \gamma])\delta\gamma_{ij}\} dv\,dt + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial v_\sigma}(\hat{t}_i - t_i)\delta u_i\,ds\,dt + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial v_u} t_i(u_i - \hat{u}_i)\,ds\,dt \tag{3.3}$$

となり，Eulerの方程式は，式(2.1),(2.2),(2.7),(2.8),(2.9)である。また，式(2.4),(2.7)を付帯条件とする汎関数は

$$J_R[\Lambda_2] = \int_{t_1}^{t_2}\int_{v} \{ \frac{\rho}{2}\dot{u}_m\dot{u}_m - \rho \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathfrak{P}}}[\gamma_r^t;\gamma] + \rho \underset{s=0}{\overset{\infty}{\Lambda}}[\gamma_r^t;\gamma] + \rho\hat{f}_m u_m - \frac{1}{2}\sigma_{ij}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})\} dv\,dt + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial v_\sigma}\hat{t}_i u_i\,ds\,dt + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial v_u} t_i(u_i - \hat{u}_i)\,ds\,dt, \tag{3.4}$$

ここに，$\Lambda = {}^t\{u_i, \sigma_{ij}\}$ で，$\psi = \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathfrak{P}}}[\gamma_r^t;\gamma]$ は Gibbsの熱力学ポテンシャルである．また，式(2.1),(2.4),(2.7),(2.8)を付帯条件とする汎関数

$$J_P[u_i] = \int_{t_1}^{t_2}\int_{v} \{ \frac{\rho}{2}\dot{u}_m\dot{u}_m - \rho \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathfrak{P}}}[\gamma_r^t;\gamma] + \rho \underset{s=0}{\overset{\infty}{\Lambda}}[\gamma_r^t;\gamma] + \rho\hat{f}_m u_m\} dv\,dt + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial v_\sigma}\hat{t}_i u_i\,ds\,dt \tag{3.5}$$

の才1変分を零とおけば，動的な問題における仮想仕事原理に一致した形式

$$\delta J_P = \int_{t_1}^{t_2}\int_{v} \{ \rho\dot{u}_m\delta\dot{u}_m - \sigma_{ij}\delta\gamma_{ij} + \rho\hat{f}_m\delta u_m\} dv\,dt + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial v_\sigma}\hat{t}_i\,\delta u_i\,ds\,dt = 0 \tag{3.6}$$

が得られる．汎関数(3.5)を準静的でかつ微小歪 ε_{ij} の場合に対して，書き換えれば

$$J_P'[u_i] = \int_{t_1}^{t_2}\int_{v} \{ \rho \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathfrak{P}}}[\gamma_r^t;\gamma] - \rho \underset{s=0}{\overset{\infty}{\Lambda}}[\gamma_r^t;\gamma] - \rho\hat{f}_m u_m\} dv\,dt - \int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial v_\sigma}\hat{t}_i u_i\,ds\,dt \tag{3.7}$$

となり，Eulerの方程式は，$\delta J_P' = 0$ より

$$\sigma_{ij,j} + \hat{f}_m = 0, \quad \sigma_{ij}n_j = \hat{t}_i \tag{3.8}$$

である．式(3.8)と内部仕事量の非負値性により，式(3.8)の才2変分は

$$\delta^2 J_P' = \int_{t_1}\int_{v}\delta\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\,dv\,dt \geqq 0 \tag{3.9}$$

であるから，式(3.8)を満たす関数を u_i^* とすれば，u_i^* の近傍の任意の許容関数 u_i に対して $J_P'[u_i] \geqq J_P'[u_i^*]$ であることが容易に示される．

4.) Vainbergの定理の拡張

Vainberg[4]によれば，基礎方程式 $\mathcal{P}(u) = \mathcal{N}(u) - f = 0$ の非線形作用素 $\mathcal{P}$ がポテンシャル作用素としての必要十分条件

$$\langle G\mathcal{P}(u|h_1), h_2\rangle = \langle G\mathcal{P}(u|h_2), h_1\rangle \tag{4.1}$$

を満たす場合，$\mathcal{P}(u)=0$ に対応する変分汎関数は

$$J[u] = \int_0^1 \langle \mathcal{P}(u_0 + s(u-u_0)), (u-u_0)\rangle ds + J_0, \quad (J_0 = J[u_0]) \tag{4.2}$$

で与えられる。ここに，$G\mathcal{P}(u|h)$ は Gateaux微分，$\langle\ ,\ \rangle$ は汎関数を表ゆす記号である。ここで，時空における変分の概念について考察する。運動方程式は任意の瞬間における力の平衡関係を表現しているものであり，また，変位の微小変化量に対する運動エネルギー，保存的エネルギー，散逸エネルギーの釣合条件も各瞬間ごとに成立しなければならない。したがって，時空における変位 $u_i(x,t)$ の変分 δu_i は，ある単位時間当たりの微小変化量と考える必要がある。上記のような時空における変分概念を導入した場合，可逆的力と不可逆的力が同時に存在する力学系に対して，式(4.2)の代わりに，力学的意味を有するポテンシャルを用いて，変分汎関数を構成することができる。

5.) あとがき

熱力学的な考察に基づいて，動的非線形履歴性材料に対する一般化された変分原理を構成し，Vainbergの定理の時空への拡張について説明した。Hamiltonの原理に対応する汎関数(3.5)の才1変分を零とおけば，動的問題の仮想仕事原理に一致すること，および微小変形で準静的な場合に対する汎関数(3.7)は極値性を有することを示した。また，汎関数(3.5)は，Biot[5]が連成熱弾性問題に対して導びいたものと熱力学的に同一形式となっていることは注目すべきことであるように思われる。

参考文献 (1) A.C. Eringen: Mechanics of Continua, John Wiley & Sons. 1967, pp. 320–325, (2) A.C. Eringen: Continuum Physics II, Academic Press. 1975 pp. 164–172, (3) D.G.B. Edelen: Arch. Ration. Mech. Analysis, 51, 1973, pp. 218 (4) M.M. Vainberg: Variational Methods for the Study of Nonlinear Operator, Holden-Day, 1964, (5) Y.C. Fung: 固体の力学, 培風館, 1970. P409