I-24　剛体－バネ モデル によるアーチの解析

岐阜大学 大学院　学生員 ○松本 憲一
岐阜大学工業短期大学部　正員　井上 肇

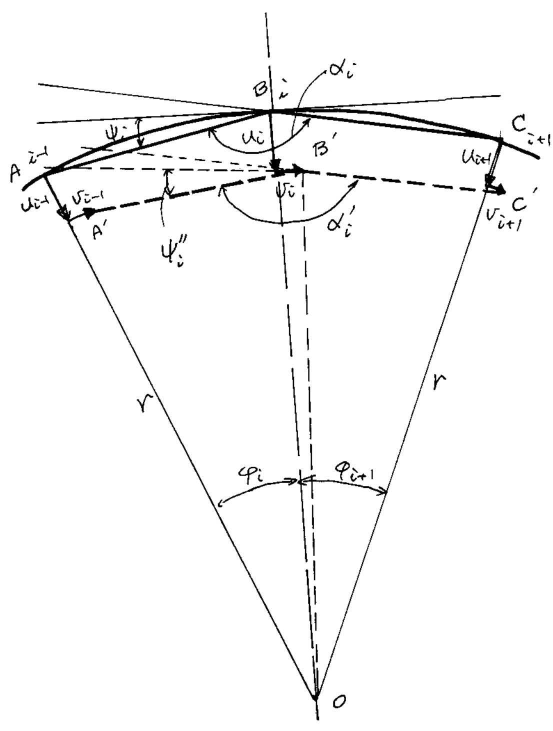
構造物の非線形解析の際には、有限要素法等により、荷重漸増法や反覆法などによって遂行されることが多いが、その過程において多元の連立方程式を解く必要にせまられてくる。このとき未知量の数は、たとえば有限要素法では、1個の節点について、はりでは2個、板では3個を必要とするが、それを差分法では、それぞれ1個ですむことになる。このような未知量の減少は、係数行列がBand Matrixであれば、その巾をも減少させ、元数の減少と相まって、計算量を著しく減少させ、多少の節点数の増加を見込んでも計算に要する時間を大きく節約できる。しかし差分法においては、基礎微分方程式からの差分展開であるため、材料非線形の場合には、十分な対応が出来ない。

このような制約から解放するため、構造物を有限要素法のように有限個に分割し、その弾性等の力学的性質は、その節点に置いたバネと考え、節点間はすべて剛体とする考え方を導入すれば、バネを弾性のみならず、弾塑性や粘弾性のものを導入すれば、構造物の非線形解析を遂行することとなる。

この方法によれば、弾性のとき、はりの場合、差分法による式と全く一致し、一種の差分法の概念的なものへの拡張ということができる。しかし、差分法の如く、一定の間かくに節点をとる必要はなく、有限要素法のように、任意に分割して考えることが出来るため、有限要素法と差分法の中間に位するもので、前述のように、微分差分法に近いものであると考えられる。

このモデルによる粘弾性はりの振動解析については、すでに報告[1)]しているが、ここでは、アーチにこれを適用しようとするものである。図は円形アーチを分割した一要素の変位状況を示したものであるが、節点A, B, Cが、それぞれ $u_{i-1}, v_{i-1}, u_i, v_i, u_{i+1}, v_{i+1}$ だけ変位し（このときは、アーチリブを剛体とは考えていない）、変形前にA, B, Cを結ぶ弦が α_i の角度を持っていたものが、α_i' に変化し、相対的に

$\theta_i = \alpha_i' - \alpha_i$ だけの角度変化が発生したものと考える。また、アーチリブの軸線の長さも変化（ΔS_i）するが、これも同様にして変形後のA, Bの位置から求めたもので、$\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ 等の中心角 φ_i, φ_{i+1} 等は余り大きくないとし、変位も微小であるとした。



$$\tan\psi_i'' = \tan\left(\varphi_i/2 + \Delta\varphi_i\right)$$
$$\fallingdotseq \tan\varphi_i/2 + \frac{1}{r\sin^2\varphi_i}\left\{u_{i-1}\sin\varphi_i - u_i\sin\varphi_i - v_{i-1}(1-\cos\varphi_i) + v_i(1-\cos\varphi_i)\right\}$$

φ_i は小さく、$\Delta\varphi_i$ も微小であるから

$$\Delta\varphi_i = \frac{1}{r\sin^2\varphi_i}\left\{u_{i-1}\sin\varphi_i - u_i\sin\varphi_i - v_{i-1}(1-\cos\varphi_i) + v_i(1-\cos\varphi_i)\right\} \quad (1)$$

$\widehat{AB}$ の長さの変化は、中心角の変化を考えて

$$\Delta S_i \doteqdot \left\{ r - \tfrac{1}{2}(u_{i-1}+u_i) \right\}(2\cdot\psi_i'') - r\varphi_i \doteqdot \frac{1}{\sin^2\varphi_i}\Big\{ u_{i-1}(2\sin\varphi_i - \varphi_i/2) - u_i(2\sin\varphi_i + \varphi_i/2) - 2v_{i-1}(1-\cos\varphi_i) + 2v_i(1-\cos\varphi_i) \Big\} \qquad (2)$$

(1) から弦 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ の角度変化は

$$\theta_i = \Delta\varphi_i + \Delta\varphi_{i+1} = \frac{1}{r}\left[a_{1i}, a_{2i}, a_{3i}, b_{1i}, b_{2i}, b_{3i}\right]\cdot\left\{u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}\right\}^T \qquad (3)$$

$\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ の軸線の長さの変化の半分は (2) から

$$\nu_i = \frac{1}{2}(\Delta S_i + \Delta S_{i+1}) = \left[c_{1i}, c_{2i}, c_{3i}, d_{1i}, d_{2i}, d_{3i}\right]\cdot\left\{u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}\right\}^T \qquad (4)$$

として求められる。これは、節点 B におけるバネによる変形分である。

ここで

$$a_{1i} = \frac{1}{\sin\varphi_i}, \quad a_{2i} = -\frac{1}{\sin\varphi_i} - \frac{1}{\sin\varphi_{i+1}}, \quad a_{3i} = \frac{1}{\sin\varphi_{i+1}}$$

$$b_{1i} = -\frac{1-\cos\varphi_i}{\sin^2\varphi_i}, \quad b_{2i} = \frac{1-\cos\varphi_i}{\sin^2\varphi_i} + \frac{1-\cos\varphi_{i+1}}{\sin^2\varphi_{i+1}}, \quad b_{3i} = -\frac{1-\cos\varphi_{i+1}}{\sin^2\varphi_{i+1}} \qquad (5)$$

$$c_{1i} = \frac{2\sin\varphi_i - \varphi_i/2}{2\sin^2\varphi_i}, \quad c_{2i} = \frac{-2\sin\varphi_i - \varphi_i/2}{2\sin^2\varphi_i} - \frac{2\sin\varphi_{i+1} - \varphi_{i+1}/2}{2\sin^2\varphi_{i+1}}, \quad c_{3i} = \frac{2\sin\varphi_{i+1} - \varphi_{i+1}/2}{2\sin^2\varphi_{i+1}}$$

$$d_{1i} = -\frac{1-\cos\varphi_i}{\sin^2\varphi_i}, \quad d_{2i} = \frac{1-\cos\varphi_i}{\sin^2\varphi_i} + \frac{1-\cos\varphi_{i+1}}{\sin^2\varphi_{i+1}}, \quad d_{3i} = \frac{1-\cos\varphi_{i+1}}{\sin\varphi_{i+1}}$$

各節点における回転、伸縮のバネ常数を K_{1i}, K_{2i} とすれば、全構造系に貯えられる Strain Energy V は節点の数を n とすれば

$$V = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}K_{1i}\,\theta_i^2 + \frac{1}{2}K_{2i}\cdot\nu_i^2 \right) \qquad (6)$$

Castigliano の定理によって、各節点に作用している、半径方向および接線方向に働く力 X_i, Y_i は次のようにして求められる。

$$X_i = \frac{\partial V}{\partial u_i} = \sum_{i=1}^{n}\left(K_{1i}\,\theta_i\,\partial\theta_i/\partial u_i + K_{2i}\,\nu_i\,\partial\nu_i/\partial u_i \right) \qquad (7)$$

$$Y_i = \frac{\partial V}{\partial v_i} = \sum_{i=1}^{n}\left(K_{1i}\,\theta_i\,\partial\theta_i/\partial v_i + K_{2i}\,\nu_i\,\partial\nu_i/\partial v_i \right)$$

(7) は変位 u, v を含んだ連立方程式で バネ常数 K_{1i}, K_{2i} を決めれば所要の解が得られる。
通常の弾性範囲での載荷応答，自由振動，線型粘弾性の場合についての計算結果は，発表当日にゆずる。

1) 松本，井上；新しい有限モデルによる粘弾性ばりの振動解析，土木学会中部支部研究発表会，1978年2月