

運輸省 正員 江河 直人  
北海道大学 正員 三上 隆  
北海道大学 正員 荻沢 憲吉

1. まえがき 橋の設計において 橋各部分の温度変化は応力を発生させるため 検討しなければならない問題である。本報告では直線一室箱桁橋と曲線一室箱桁橋(単純橋)の温度変形と温度応力を有限帯板法を用いて解析し、両者を比較してみたものである。

2. 解析方法 解析にあたって 変形、温度分布は橋軸方向にフーリエ級数展開できるものとし、橋軸面端部は単純支持されているものとする。また等方性材料を仮定する。

1) 長方形板要素について 図-1の長方形板要素の変位関数として次式を仮定する。

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \left(1 - \frac{x}{a}\right) u_m + \frac{x}{a} u_m \right] \sin \frac{m\pi}{a} y \\ v &= \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \left(1 - \frac{x}{a}\right) v_m + \frac{x}{a} v_m \right] \cos \frac{m\pi}{a} y \\ w &= \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \left(1 - \frac{3x^2}{a^2} + \frac{2x^3}{a^3}\right) w_m + \left(x - \frac{2x^2}{a} + \frac{x^3}{a^2}\right) \gamma_m \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{3x^2}{a^2} - \frac{2x^3}{a^3}\right) w_m + \left(\frac{x^3}{a^2} - \frac{x^4}{a^3}\right) \gamma_m \right] \sin \frac{m\pi}{a} y \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ひずみ-変位関係式は次式で与えられる。

$$\mathbf{e} = \{ \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}, -\chi_x, -\chi_y, \chi_{xy} \}^T \quad (2)$$

ここに  $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$ ,  $\varepsilon_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$

$$\chi_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \chi_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \chi_{xy} = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$(1) \text{式を代入して } \mathbf{e} = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{e}_m = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{B}_m \cdot \mathbf{d}_m \quad (3)$$

応力-ひずみ関係式は次式で示される。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{xx} & E_{xy} & 0 \\ E_{xy} & E_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (\varepsilon_x - \alpha \chi_x) - \alpha T \\ (\varepsilon_y - \alpha \chi_y) - \alpha T \\ \varepsilon_{xy} + \alpha \chi_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

ここに  $E_{xx} = E_{yy} = \frac{E}{1-\mu^2}$ ,  $E_{xy} = \frac{\mu E}{1-\mu^2}$ ,  $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$

Tは無ひずみ無応力状態からの温度変化

\* Eは弾性係数,  $\mu$ はポアソン比,  $\alpha$ は熱膨張係数

断面力は (4)式より  $\mathbf{a} = \mathbf{D} \cdot (\mathbf{e} - \mathbf{e}_T)$  (5)

$$\mathbf{a} = \{ N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy} \}^T \quad (6)$$

$$\mathbf{e}_T = \{ \alpha N_T, \alpha N_T, 0, \alpha M_T, \alpha M_T, 0 \}^T \quad (7)$$

$$N_T = \frac{1}{a} \int_0^a T dx = \sum_{m=1}^{\infty} N_{Tm} \sin \frac{m\pi}{a} y \quad (8)$$

$$M_T = \frac{1}{a^2} \int_0^a T x dx = \sum_{m=1}^{\infty} M_{Tm} \sin \frac{m\pi}{a} y \quad (9)$$

要素のひずみエネルギーUは

$$U = \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} d_m^T \int_0^a \int_0^d \mathbf{B}_m^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_m dx dy \cdot d_m - d_m^T \int_0^a \int_0^d \mathbf{B}_m^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{e}_{Tm} dx dy + \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^d \mathbf{C}(T) dx dy \right] \quad (10)$$

カスリリヤ / の第一定理より

$$\frac{\partial U}{\partial d_m} = \int_0^a \int_0^d \mathbf{B}_m^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_m dx dy \cdot d_m - \int_0^a \int_0^d \mathbf{B}_m^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{e}_{Tm} dx dy = F_m \quad (11)$$

ここに、剛性マトリクス  $\mathbf{K}_m$ , 温度分布による等価節線熱

荷重  $\mathbf{Q}_{Tm}$ , 節線に働く力  $\mathbf{F}_m$  であり,  $\mathbf{K}_m, \mathbf{Q}_{Tm}$  は

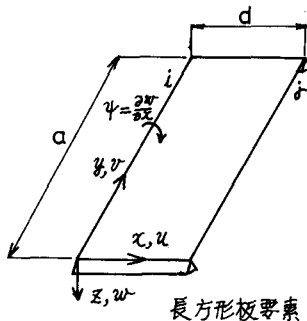
$$\mathbf{K}_m = \int_0^a \int_0^d \mathbf{B}_m^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_m dx dy \quad (12)$$

$$\mathbf{Q}_{Tm} = \int_0^a \int_0^d \mathbf{B}_m^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{e}_{Tm} dx dy \quad (13)$$

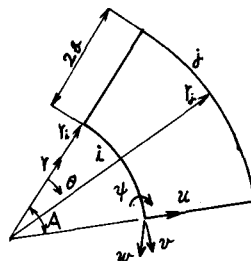
□ 扇形板要素について 変位関数は次式である。

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \left(1 - \frac{R}{2}\right) u_m + \frac{R}{2} u_m \right] \sin \frac{m\pi}{A} \theta \\ v &= \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \left(1 - \frac{R}{2}\right) v_m + \frac{R}{2} v_m \right] \cos \frac{m\pi}{A} \theta \\ w &= \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \left(1 - \frac{3}{4} R^2 + \frac{1}{4} R^3\right) w_m + b \left(R - R^2 + \frac{3}{4} R^3\right) \gamma_m \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{3}{4} R^2 - \frac{1}{4} R^3\right) w_m + b \left(\frac{1}{4} R^3 - \frac{1}{2} R^2\right) \gamma_m \right] \sin \frac{m\pi}{A} \theta \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

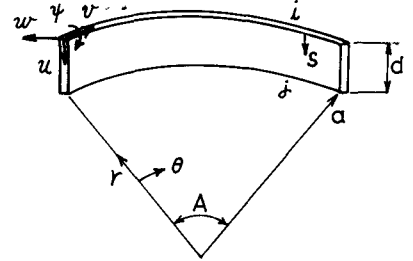
ここに  $R = \frac{r-r_i}{r}$ ,  $b = \frac{r-r_i}{2}$



長方形板要素



扇形板要素



ウェブシェル部要素

図-1

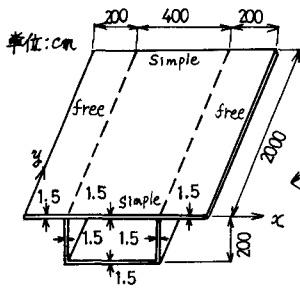


図-2

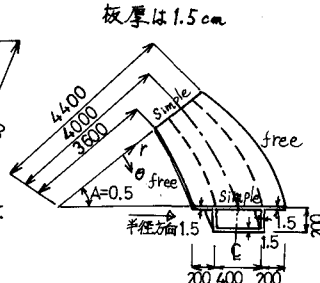


図-3

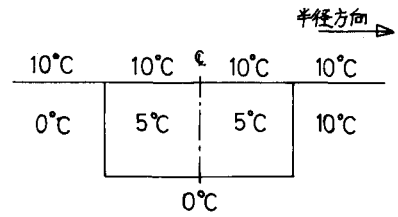


図-4

扇形板要素のひずみ-変位関係式は

$$\mathbf{e} = \{ \epsilon_r, \epsilon_\theta, \epsilon_{r\theta}, -\chi_r, -\chi_\theta, \chi_{r\theta} \}^T \quad (15)$$

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \epsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{v}{r}, \epsilon_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}$$

$$\chi_r = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \chi_\theta = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right), \chi_{r\theta} = -\frac{2}{r} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)$$

長方形板要素と同様に応力-ひずみ関係式を用いて断面力は  $\mathbf{Q} = \mathbf{D} \cdot (\mathbf{e} - \mathbf{e}_T)$  (16)

$$\mathbf{Q} = \{ N_r, N_\theta, N_{r\theta}, M_r, M_\theta, M_{r\theta} \}^T, \mathbf{e}_T = \{ \alpha N_T, \alpha N_T, 0, \alpha M_T, \alpha M_T, 0 \}^T, N_T = \frac{1}{A} \int_A T dA = \sum_{i=1}^n N_{Ti} \sin \frac{\pi x_i}{A} \theta, M_T = \frac{1}{A} \int_A T x dA = \sum_{i=1}^n M_{Ti} \sin \frac{\pi x_i}{A} \theta$$

剛性マトリクス

$$K_n \text{ および 等価節線熱荷重 } Q_{Tn} \text{ は次のようになる。}$$

$$K_n = \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{B}_n^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_n r dr d\theta \quad (17)$$

$$Q_{Tn} = \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{B}_n^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{e}_T r dr d\theta \quad (18)$$

(参考:  $Q_{Tn}(1) = -\frac{A}{2} \left( \frac{E\alpha}{1-\mu} k_i \right) N_{Tn} l$

$$Q_{Tn}(2) = -\frac{A}{2} \left( \frac{E\alpha}{1-\mu} k_i \right) \frac{\pi x_i}{A} N_{Tn} l \dots \text{等} )$$

ハ) ウェブシエル部要素について 変位関数はS方向に  $u, v$  は1次,  $w$  は3次関数を仮定し,  $\theta$  方向に  $u, v$  は  $\sin$  展開し,  $w$  は  $\cos$  展開する。以下, 長方形板・扇形板要素と同様にして剛性マトリクス, 等価節線熱荷重が求められる。

3. 計算例 図-2, 図-3に示す支間20mの箱桁橋を計算例にとり, 温度分布は図-4のように考え橋軸方向には一定とした。材料定数として  $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\mu = 0.3$ ,  $\alpha = 0.12 \times 10^{-4}$ 。分割は断面を32等分割して解析を行なった。図-5は上からそれぞれ支間中央断面での面外変形, 橋軸直角方向モーメント, 橋軸方向面内断面力の分布を 直線箱桁橋と曲線箱桁橋について示している。この場合, 面者を比較してみると, 面外変形, 面外断面力に比べて 面内断面力にちがいがでている事がわかる。

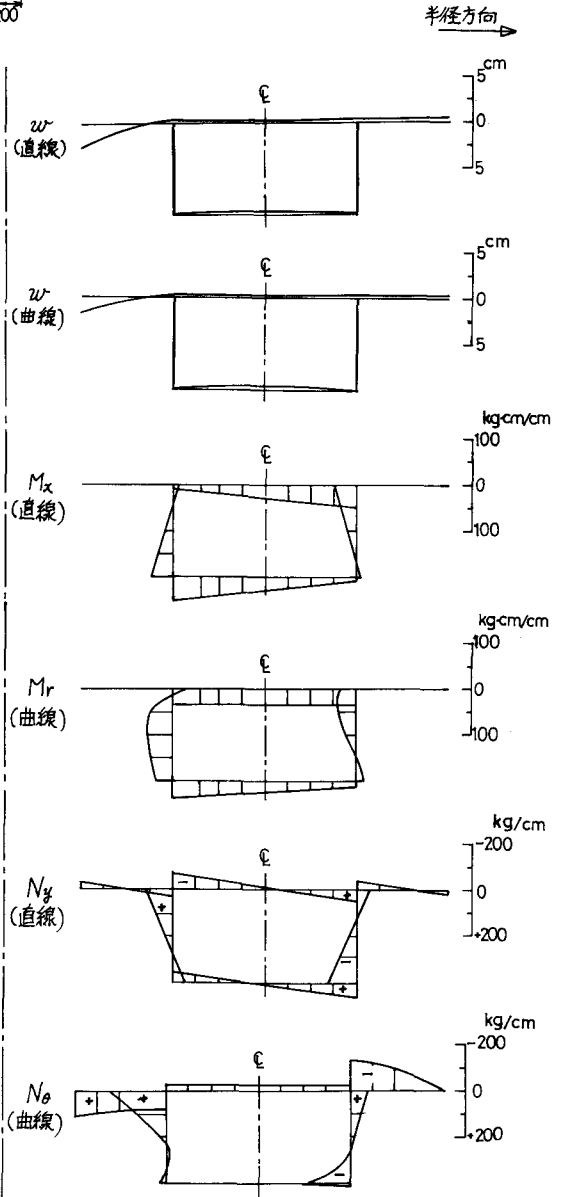


図-5

参考文献 1) Y.K.Chung, *Finite Strip Method in Structural Analysis*, Pergamon Press 1976

2) 芳村仁, 三上隆, 田善雅, 弾性基礎上の円筒形タンクの非軸対称温度応力について 第32回全国大会要集