

信州大学大学院 (学) ○ 友永則雄
 信州大学 工学部 (正) 夏目正太郎
 飛島建設 (株) (正) 谷本勉之助

1. まえがき

これまで我々の研究室では弾性論の有限要素解析に関して次の二つの系列の手法を開発してきている：

- (a) 節英連結による有限要素法¹⁾
 (b) 辺連結による<平均値>有限要素法²⁾

いずれも、基礎微分方程式を満足する変位関数から出発して、変分原理を介在させることなく定式化を行なうものであつて、各々一定の成果を収めている。

ここに報告する方法は、上記二つの方法を組合わせて用いることに上つて、要素辺と節英とで要素間の連結を行なおうとするものである。従つて要素の自由度は、通常の *midside node* を有する高次要素に於ける自由度と同一になる。以下では4角形要素を用いた平面応力問題への適用例について述べることにする。

2. 変位ベクトル、応力ベクトル

平面応力問題に於ける状態ベクトルを次式で定義する：

$$\begin{aligned} \bar{U}(x, y) = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, x, y, x^2, y^2, xy - \frac{2}{3(1-\nu)}y^3, xy^2 - \frac{1-\nu}{6}x^3, x^4 + y^4 - 6x^2y^2, \\ 0, 0, 0, -\frac{4}{1+\nu}xy, -2\frac{1-\nu}{1+\nu}xy, -\frac{1+\nu}{3(1-\nu)}x^3, -\frac{1+\nu}{6}y^3, 4(xy^3 - x^3y), \\ 0, 0, 0, -2\frac{1-\nu}{1+\nu}xy, -\frac{4}{1+\nu}xy, -\frac{1+\nu}{6}x^3, -\frac{1+\nu}{3(1-\nu)}y^3, 4(x^3y - xy^3), \\ 1, x, y, x^2, y^2, xy - \frac{2}{3(1-\nu)}y^3, xy^2 - \frac{1-\nu}{6}x^3, x^4 + y^4 - 6x^2y^2 \end{bmatrix} N - \frac{2(1-\nu)}{E} \begin{bmatrix} 0, xy \\ xy, 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \\ = P(x, y)N + A(x, y)K, \end{aligned} \quad (1a)$$

$$V(x, y) = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]^T = Q(x, y)N + B(x, y)K, \quad (1b)$$

ここに $K = [X, Y]^T$ は物体カベクトル、また N は 16 個の未知定数から成る列ベクトルである。変位ベクトル(1a)は基礎微分方程式を満足するように選ばれている。

3. 節英変位 $\bar{U}^i$ 、節英力 $\bar{W}^i$

4角形要素の節英 i に於いて節英変位 $\bar{U}^i$ および節英力 $\bar{W}^i$ をそれぞれ次式で定義する：

$$\bar{U}^i = \bar{U}(x_i, y_i) = P^i N + A^i K \quad (i=1, 2, 3, 4), \quad (2a)$$

$$\bar{W}^i = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}^i = \varepsilon \int_{\theta_j}^{\theta_k} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} V^i d\theta = R^i N + C^i K \quad (i=1, 2, 3, 4), \quad (2b)$$

ここに θ_j, θ_k は要素辺 $i-j, i-k$ が x 軸となす角である。

4. 平均値変位 $\bar{\bar{U}}^i$ 、辺力 $\bar{\bar{W}}^i$

要素の辺 i に対する平均的変位量である平均値変位 $\bar{\bar{U}}^i$ および辺に於ける合力である辺力 $\bar{\bar{W}}^i$ をそれぞれ次式で定義する(図1)：

$$\bar{\bar{U}}^i = \frac{1}{L_{jk}} \int_j^k \bar{U}(x, y) ds = \bar{P}^i N + \bar{A}^i K \quad (i=1, 2, 3, 4), \quad (3a)$$

$$\bar{w}^i = \begin{bmatrix} \bar{f}_x \\ \bar{f}_y \end{bmatrix}^i = \int_i^* \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}_i \nabla(x,y) ds = \bar{R}^i \bar{N} + \bar{C}^i K \quad (i=1, 2, 3, 4), \quad (3b)$$

ここに $(\cos\phi, \sin\phi)_i$ は辺 i に立てた法線 ν の方向余弦である。係数マトリクス $\bar{P}^i, \bar{A}^i, \bar{R}^i, \bar{C}^i$ は要素辺が直線であれば、容易に陽な形に得ることが出来る。要素が曲がっているとせば、1次元 Gauss 積分に依ることになる。

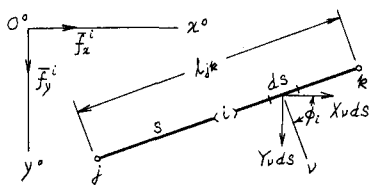


図1. 要素辺 i

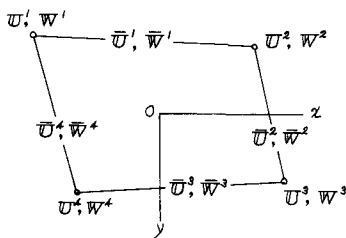


図2. 4角形要素 (16自由度)

5. 要素剛性マトリクス

(2a, b) および (3a, b) から $\bar{N}$ を消去して次の要素剛性方程式を得る:

$$\begin{bmatrix} \bar{w}^1 \\ \bar{w}^2 \\ \bar{w}^3 \\ \bar{w}^4 \\ \bar{w}^1 \\ \bar{w}^2 \\ \bar{w}^3 \\ \bar{w}^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{R}^1 \\ \bar{R}^2 \\ \bar{R}^3 \\ \bar{R}^4 \\ \bar{R}^1 \\ \bar{R}^2 \\ \bar{R}^3 \\ \bar{R}^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{P}^1 \\ \bar{P}^2 \\ \bar{P}^3 \\ \bar{P}^4 \\ \bar{P}^1 \\ \bar{P}^2 \\ \bar{P}^3 \\ \bar{P}^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}^1 \\ \bar{U}^2 \\ \bar{U}^3 \\ \bar{U}^4 \\ \bar{U}^1 \\ \bar{U}^2 \\ \bar{U}^3 \\ \bar{U}^4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{A}^1 \\ \bar{A}^2 \\ \bar{A}^3 \\ \bar{A}^4 \\ \bar{A}^1 \\ \bar{A}^2 \\ \bar{A}^3 \\ \bar{A}^4 \end{bmatrix} K + \begin{bmatrix} \bar{C}^1 \\ \bar{C}^2 \\ \bar{C}^3 \\ \bar{C}^4 \\ \bar{C}^1 \\ \bar{C}^2 \\ \bar{C}^3 \\ \bar{C}^4 \end{bmatrix} K = \begin{bmatrix} \alpha^1 \beta^1 \gamma^1 \delta^1 & \lambda^1 \mu^1 \nu^1 \theta^1 & \bar{U}^1 \\ \alpha^2 \beta^2 \gamma^2 \delta^2 & \lambda^2 \mu^2 \nu^2 \theta^2 & \bar{U}^2 \\ \alpha^3 \beta^3 \gamma^3 \delta^3 & \lambda^3 \mu^3 \nu^3 \theta^3 & \bar{U}^3 \\ \alpha^4 \beta^4 \gamma^4 \delta^4 & \lambda^4 \mu^4 \nu^4 \theta^4 & \bar{U}^4 \\ \hline \bar{\alpha}^1 \bar{\beta}^1 \bar{\gamma}^1 \bar{\delta}^1 & \bar{\lambda}^1 \bar{\mu}^1 \bar{\nu}^1 \bar{\theta}^1 & \bar{U}^1 \\ \bar{\alpha}^2 \bar{\beta}^2 \bar{\gamma}^2 \bar{\delta}^2 & \bar{\lambda}^2 \bar{\mu}^2 \bar{\nu}^2 \bar{\theta}^2 & \bar{U}^2 \\ \bar{\alpha}^3 \bar{\beta}^3 \bar{\gamma}^3 \bar{\delta}^3 & \bar{\lambda}^3 \bar{\mu}^3 \bar{\nu}^3 \bar{\theta}^3 & \bar{U}^3 \\ \bar{\alpha}^4 \bar{\beta}^4 \bar{\gamma}^4 \bar{\delta}^4 & \bar{\lambda}^4 \bar{\mu}^4 \bar{\nu}^4 \bar{\theta}^4 & \bar{U}^4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{P}^1 \\ \bar{P}^2 \\ \bar{P}^3 \\ \bar{P}^4 \\ \bar{P}^1 \\ \bar{P}^2 \\ \bar{P}^3 \\ \bar{P}^4 \end{bmatrix} K. \quad (4)$$

6. 力の釣合条件と全体剛性方程式

図3を参照すると、節要素 i 辺に於ける力の釣合条件はそれぞれ次のようになる:

$$\text{節要素: } \bar{w}_{rs}^1 + \bar{w}_{r-1,s}^2 + \bar{w}_{r-1,s-1}^3 + \bar{w}_{r,s-1}^4 + F = 0, \quad (5)$$

$$\text{辺: } \bar{w}_{rs}^1 + \bar{w}_{r,s-1}^3 + \bar{F} = 0. \quad (6)$$

系のすべての節要素 i 辺について (5), (6) の型の式を立て、(4) を用いれば、節要素変位・平均値変位を未知量とする全体剛性方程式を得る。

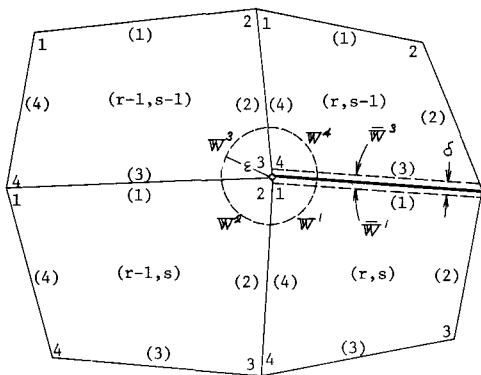


図3. 力の釣合条件

<参考文献>

- 1) 柄沢, 谷本, 夏田; “分布荷重による有限要素法 (オノ報),” 28回土木学会年次学術講演会概要集オノ部.
- 2) 友永, 谷本, 長谷; “変算子法に基づいた平均値有限要素解析,” 32回 “ ”.