

法政大学 正員 大地 幸三

1. 拘束条件を持つ構造系の解式

変形法あるいはFEMにおいて、用意された節点の間に線形の拘束条件がある場合について考えてみる。たとえば、 i 点と j 点の剛体で結ばれているものとする、 $u_i - Y\theta_i - u_j = 0$, $v_j + X\theta_i - v_j = 0$, $\theta_i - \theta_j = 0$ (ただし、 X, Y は i, j 点の座標を $(x_i, y_i), (x_j, y_j)$ とすると、 $X = x_j - x_i, Y = y_j - y_i$) なる関係が考えられる。各節点には 2~6 の自由度があるが、これを区別して表わすことは厄介になるだけで、本論文の主目的からすると、すべての節点の変位に最初から一貫番号をつけて $u_1, u_2, \dots, u_n$ と表わすことにすると、上記の線形の拘束条件は、一般に $c_{i1}u_1 + c_{i2}u_2 + \dots + c_{in}u_n = 0$ ($i=1 \sim r$, r は拘束条件の数) と書くことができる。これを簡単に式(1)のように書き、また拘束条件をつけない構造系の解式を簡単に式(2)のように書くことはする。

$$BU = 0 \quad \text{---- (1)}$$

$$KU = P \quad \text{---- (2)}$$

式(1)の拘束条件をつけた構造系のポテンシャル・エネルギーは、 λ を Lagrange 乗数と要素とするベクトルとして

$$\Pi_p = \frac{1}{2}U^T KU - U^T P + \lambda^T BU \quad \text{---- (3)}$$

と書けるが、この Π_p の極値を取る解が、拘束条件のついた構造系の解である。式(3)を U と λ について変分し 0 とおくと

$$\delta U^T (KU - P + B^T \lambda) + \delta \lambda^T (BU) = 0 \quad \text{---- (4)}$$

が得られるが、さらに $\delta \lambda = 0$ とおくと、次の解式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} KU + B^T \lambda &= P \\ BU &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{---- (5)} \quad \text{または} \quad \begin{bmatrix} K & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{---- (6)}$$

2. 厳密解

式(5) または (6) の解を求めるにはいくつかの程案があるが、いずれも解を得るまでの系統が複雑で、汎用計算のプログラムに組込むには不向きである。そこで次の解法を提案する。まず式(5)から U を消却して λ を求め、これを式(1)の U に代入すると

$$KU = P - B^T (BK^T)^{-1} B^T P \quad \text{または} \quad U = \{K^{-1} - K^{-1} B^T (BK^T)^{-1} B^T K^{-1}\} P \quad \text{---- (7)}$$

が得られるが、式(7)を実際に計算するには

$$KX = P, \quad KY = B^T \quad \text{を解いて } X, Y \text{ を求め} \quad U = X - Y(BY^T)^{-1} Y^T X \quad \text{---- (8)}$$

とすればよい。 $KX = P, KY = B^T$ は、拘束条件のない構造系の解式で右辺の荷重項を変えただけであるから構造解析用のプログラムがあれば解くことは容易である。また、拘束条件の数がいれば、行列 BY^T の元数も小さいので、この行列の逆行列を求めることも困難ではない。

3. 实用的解法

式(6)を解くことが困難な理由は、係数行列の $(2, 2)$ の行列が 0 になっているためである。0 のかわりに微小な値 ϵ を対角線上に並べた対角行列を用いて下の左のようにし、この式から λ を消却すると下の右のようになる。

$$\begin{bmatrix} K & B^T \\ B & \epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{---- (9)}$$

$$\lambda = +\epsilon^{-1} B U \quad \text{---- (10)}$$

$$(K + B\epsilon^{-1}B^T)U = P \quad \text{---- (11)}$$

式(10)は、 λ が拘束条件をつけた節点のバネ反力、 ϵ^{-1} がそのバネ定数であることを意味しているし、また式(11)は、もとの構造系に上記のバネを附加した系の解式であることを意味している。式(8)を使うべきか、式(11)を使うべきかは、

小さくとして式(11)を使うべきかは、判断の分れる所であるが、著者の作ったプログラムはバネが自由に入れられるようにしてあるので、後者の方が都合がよい。

式(11)を使うとすると、 ε の値をどのようにするかが問題である。理論的には、 ε を0に($\varepsilon \rightarrow \infty$ に)近づければ近づく程、正解に近づくと考えられる。しかし、電算機で計算する場合、 ε を無限に大きくする必要はない。使用する電算機によって異なるが、 ε を一定値以上にするとう無限大と同じ働きをするようになることが予想される。このことは次の事例によってもうかがわれることである。

(1) Felippa は式(6)の特別な場合について論文を発表しているが、その計算結果を見ると UNIVAC 1110 の場合は $\varepsilon \div 2^{27} \text{norm}(K)$ 、CDC 6600 の場合は $\varepsilon \div 2^{48} \text{norm}(K)$ とすれば、 ε は無限大と同じ働きをするとき存してもよい ($2^{27} \div 10^{8.1}$ 、 $2^{48} \div 10^{14.4}$)。

(2) 変形法のプログラムで、部材の断面積を1000倍程度にすると、たわみ角法の解と同じ結果が得られることが多くの数値実験から知られている。

(3) 電算機を使用し初めは初期の時代は、支点処理の代りに曲げ剛性の100~1000倍のバネ定数を持つバネで固定端の代用をした報告がかなりあった。

(4) 行列式の値が0である係数行列を持つ連立一次方程式は、理論的には解くことが出来ないが、係数行列の要素の有効桁数を少なくすると解ける場合がある。たとえば、ボッフス・ラーメンを解くためのたわみ角法の解式はこの種の連立一次方程式であるが、昔から設計計算に使われており問題はなかった。

4. 数値実験

式(11)の ε の値を種々にかえてこれを解き、無限大とみなすことのできる ε の値をさがしてみた。以下はこの数値実験の一部を紹介する。使用した電算機は、本学の FACOM 230-45S である。

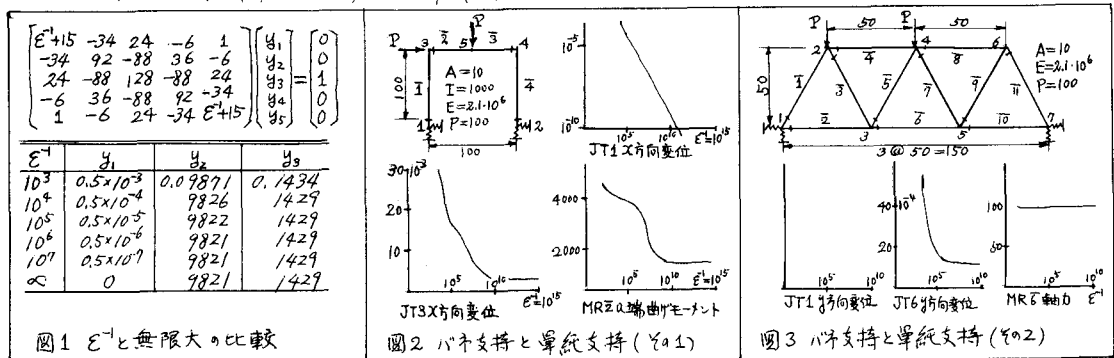


図1 ε と無限大の比較

図2 バネ支持と単純支持 (ヤ1)

図3 バネ支持と単純支持 (ヤ2)

(図1) 無限大とみなされる ε の大きさを求めるための数値実験。本計算の有効桁数は23bit(6.9桁)。

(図2,3) 単純支持とバネ支持におおきく ε を次第に大きくした場合、拘束条件は $x_1=y_1=x_2=y_2=0$ 。図2以下は一部倍精度(有効桁数55bit, 16.5桁)を用いた。

(図4) 中間に4をバネにかえた場合。拘束条件は $x_4-x_8=0$ 、 $y_4-y_8=0$ 。

(図5) 剛域を拘束条件にかえた場合。拘束条件は $x_3-x_8-x_6=0$ 、 $y_3-y_6=0$ 、 $\theta_3-\theta_6=0$ 。

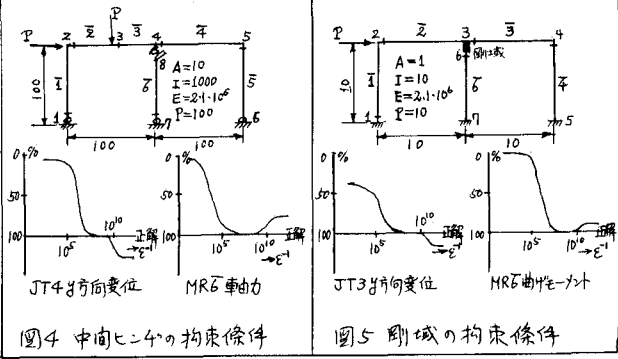


図4 中間に4の拘束条件

図5 剛域の拘束条件

* R.H. MacNeal "The NASTRAN Theoretical Manual" NASA-SP-221(01), ('72) ; B.E. Greene "Application of Generalized Constraints in the Stiffness Method of Structural Analysis" AIAA Journal 4-9 ('66) ** C.A. Felippa "Error Analysis of Penalty Function Techniques for Constraint Definition in Linear Algebraic Systems" Int. J. NME 11('77) *** 大地 "ストリットス構造解析" 工社社, p164 ('77)